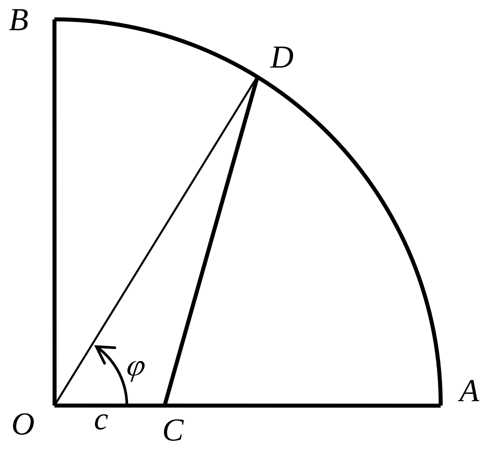
<u>Problème</u>

Trouver le plus court segment qui divise un quart de disque en deux parties d'aire égale.



Solution

Il faut donc minimiser le carré de la longueur du segment CD :

$$\overline{CD}^2 = (R\cos\varphi - c)^2 + (R\sin\varphi)^2 = R^2 + c^2 - 2Rc\cos\varphi$$

Sous la condition : Aire de (CAD) $= \dfrac{\pi R^2}{8}$

Aire de (CAD) = Aire du secteur (OAD) – Aire du triangle (OCD) = $\dfrac{\varphi}{2\pi}\left(\pi R^2\right) - \dfrac{1}{2}c\left(R\sin\varphi\right)$

Après simplification, la condition s'écrit :

$$\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)R = c\sin\varphi$$

Cherchons le minimum de $\overline{CD}^2$ par rapport à *c*, tenant compte que φ est fonction de *c*.

$$\frac{d\,\overline{CD}^2}{dc} = 2c - 2R\cos\varphi + 2Rc\sin\varphi\frac{d\varphi}{dc} = 0$$

Pour calculer $\dfrac{d\varphi}{dc}$, dérivons la condition, ce qui donne : $Rd\varphi = dc\sin\varphi + (c\cos\varphi)d\varphi$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dc} = \frac{\sin\varphi}{R - c\cos\varphi}$$

$$2c - 2R\cos\varphi + 2Rc\sin\varphi\frac{\sin\varphi}{R - c\cos\varphi} = 0$$

$$c - R\cos\varphi + \frac{Rc\sin^2\varphi}{R - c\cos\varphi} = 0$$

$$(c - R\cos\varphi)(R - c\cos\varphi) + Rc\sin^2\varphi = 0$$

On en tire : $\cos\varphi = \dfrac{2Rc}{R^2 + c^2}$ ou bien $\sin\varphi = \dfrac{R^2 - c^2}{R^2 + c^2}$ (pour $0 \le \varphi \le \pi/2$)

En utilisant la condition pour remplacer *c/R* dans cette expression, on aboutit à :

$$\sin\varphi = \frac{1 - \left(\dfrac{\varphi - \pi/4}{\sin\varphi}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{\varphi - \pi/4}{\sin\varphi}\right)^2}$$

Cette équation transcendante se résout numériquement[1]. On trouve :

$\varphi \cong 1{,}0247$; $\sin\varphi \cong 0{,}8546$; $c/R \cong 0{,}2800$ et $\overline{CD}/R \cong 0{,}8874$

[1] Par exemple, en utilisant la méthode de Newton.