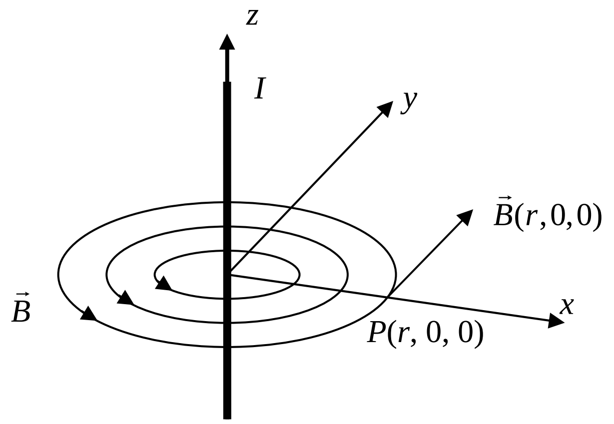
Flux du champ magnétique créé par un courant rectligne infini

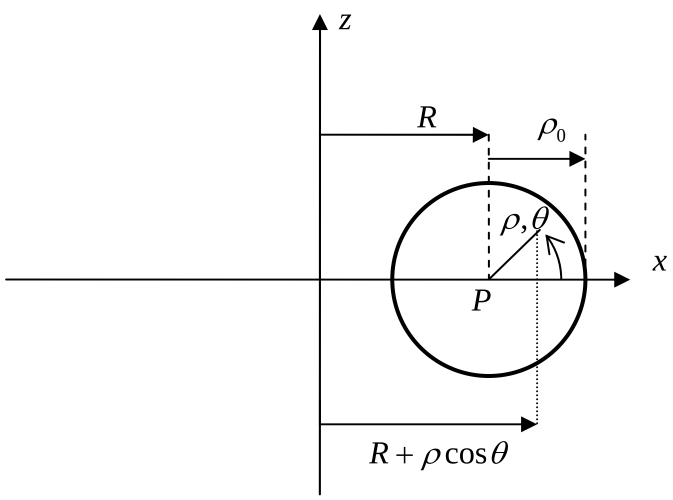
On se propose de calculer le flux intercepté par un disque perpendiculaire aux lignes de champ.



Choisissons l'axe *z* selon le courant. À une distance *r* de cet axe le module du champ vaut :

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \qquad \text{[T] ou [Wb/m}^2\text{]}$$

Dans le plan *xz*, soit un disque de rayon ρ_0 centré sur *P*.



On se propose donc de calculer : $\Phi = \iint\limits_{disque} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \iint\limits_{disque} \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{R + \rho\cos\theta}$

ρ va de 0 à ρ_0 et θ de 0 à 2π . On suppose aussi $\rho_0 < R$.

Si $\rho_0 << R$ alors $\Phi \to \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\pi\rho_0^2 = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{\rho_0^2}{R}$

Intégrons d'abord sur θ. Vu la symétrie du cosinus par rapport à π :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R+\rho\cos\theta} = 2\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{R+\rho\cos\theta}$$

Tables, cours de maths : si $b^2 > c^2 \rightarrow \int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \frac{2}{\sqrt{b^2-c^2}} \arctan \frac{bc\tan\frac{ax}{2}}{\sqrt{b^2-c^2}}$

$$2\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{R+\rho\cos\theta} = 2\frac{2}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \arctan \frac{R\rho\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\left[\arctan(\infty)-\arctan(0)\right]=$$

$$= \frac{4}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

Intégrons maintenant sur ρ.

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{\rho 0} \frac{2\pi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho = \mu_0 I \int_0^{\rho 0} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = \mu_0 I \left| -\sqrt{R^2-\rho^2} \right|_0^{\rho 0} = \mu_0 I \left(-\sqrt{R^2-\rho_0^2}+R\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\Phi = \mu_0 I\left(R-\sqrt{R^2-\rho_0^2}\right)} \qquad \text{[Wb]}$$