■ Annexe G3 : Paraboloïde osculateur:

Toute surface $z = f(x,y)$ deux fois dérivable peut être approximée au voisinage d'un de ses points par une surface du second degré $z = a x^2 + 2 c x y + b y^2$ appelée paraboloïde osculateur.

Si le point est l'origine O et que le plan tangent est le plan z = 0, alors le paraboloïde admet l'équation plus simple: $z = A x^2 + 2 C x y + B y^2$.

Preuve:

Soit O(0;0) le point de la surface. Le développement limité de Taylor en ce point nous donne:

```
paraboloide = Series[f[x, y], {x, 0, 2}, {y, 0, 2}] // Normal
```

$$\frac{1}{2} f^{(2,0)}(0,0)\, x^2 + f^{(1,0)}(0,0)\, x + f(0,0) + y\left(\frac{1}{2} f^{(2,1)}(0,0)\, x^2 + f^{(1,1)}(0,0)\, x + f^{(0,1)}(0,0)\right) + y^2\left(\frac{1}{4} f^{(2,2)}(0,0)\, x^2 + \frac{1}{2} f^{(1,2)}(0,0)\, x + \frac{1}{2} f^{(0,2)}(0,0)\right)$$

Eliminons les termes d'ordre supérieurs à deux et remplaçons les dérivées premières par 0 (plan tangent z = 0):

```
paraboloide =
 paraboloide /. f^(1,2)[0, 0] -> 0 /. f^(2,1)[0, 0] -> 0 /. f^(2,2)[0, 0] -> 0 /. f^(0,1)[0, 0] -> 0 /.
   f^(1,0)[0, 0] -> 0 /. f[0, 0] → 0
```

$$\frac{1}{2} f^{(2,0)}(0,0)\, x^2 + y\, f^{(1,1)}(0,0)\, x + \frac{1}{2} y^2 f^{(0,2)}(0,0)$$

Qui est de la forme $A x^2 + 2 C x y + B y^2$.

■ Annexe G1 : Courbures principales:

En coupant un paraboloïde $z = a x^2 + 2 c x y + b y^2$ par un plan vertical passant par O, on obtient une parabole dont la courbure varie en fonction de la direction du plan de coupe.

Celle-ci va prendre une valeur minimale et une valeur maximale, appelées courbures principales.

Les directions de coupe correspondantes sont les directions principales.

Celles-ci sont perpendiculaires.

Si le corps est de révolution, toutes les directions donnent la même courbure constante.

Preuve:

```
Clear[x, y, z, a, b, c, parabole]
```

■ Annexe G2: Courbure d'une parabole:

La courbure de la parabole $y = a x^2 + b x + c$ au point $P(x_0;y_0)$ vaut $\frac{2a}{((b+2a\,x0)^2+1)^{3/2}}$:

```
y[x_] = a x^2 + b x + c;

K[x_] := y''[x] / (1 + y'[x]^2)^(3/2);

K[x0]
```

$$\frac{2a}{\left((b + 2a\, x0)^2 + 1\right)^{3/2}}$$

Si la parabole admet le point O(0;0) pour sommet et y = 0 pour tangente:

```
y[x_] = a x^2;

K[0]
```

$2a$

Ainsi la courbure au sommet de la parabole $y = a\,x^2$ est donnée par 2a.

■ Annexe G3 : Courbures principales:

En coupant un paraboloïde $z = a\, x^2 + 2\, c\, x\, y + b\, y^2$ par un plan vertical passant par O, on obtient une parabole dont la courbure va varier en fonction de la direction du plan de coupe.
Celle-ci va prendre une valeur minimale et une valeur maximale, appelées courbures principales.
Les directions de coupe correspondantes sont les directions principales.
Celles-ci sont perpendiculaires.
Si le corps est de révolution, toutes les directions donnent la même courbure constante.

Preuve:

```
Clear[x, y, z, f, a, b, c, parabole]
```

```
f[x_, y_] = a x^2 + 2 c x y + b y^2;
```

Supposons que le plan de coupe vertical soit parallèle au vecteur unitaire $\vec{u} = \cos\theta\, \vec{i} + \sin\theta\, \vec{j}$.
Les équations paramétriques du plan sont alors {x = cos(θ) w , y = sin(θ) w , z = z} de paramètres w et z.
L'équation de la parabole d'intersection est alors:

```
parabole[θ_] = f[x, y] /. x -> Cos[θ] * w /. y -> Sin[θ] * w // Factor
```

$$w^2 \left(a \cos^2(\theta) + 2\, c \sin(\theta) \cos(\theta) + b \sin^2(\theta)\right)$$

La courbure est donnée (annexe G2) par le double du coefficient de w^2:

```
ρ[θ_] = 2 Coefficient[parabole[θ], w^2]
```

$$2 \left(a \cos^2(\theta) + 2\, c \sin(\theta) \cos(\theta) + b \sin^2(\theta)\right)$$

Calculons les extrema de la courbure selon la direction donnée par θ:

```
der = ρ'[θ] // Simplify
```

$$4\, c \cos(2\, \theta) + 2\, (b - a) \sin(2\, \theta)$$

La dérivée s'annule si $\theta = \theta_1$ ou $\theta = \theta_1' + \frac{\pi}{2}$, les directions sont perpendiculaires:

```
θ1 = 1/2 ArcTan[2 c/(a - b)]; θ1' = θ1 + π/2;
```

Après quelques calculs, on trouve, les courbures principales, ρ_1 et ρ_2:

```
ρ1 = ρ[θ1] // FullSimplify
ρ1' = ρ[θ1'] // FullSimplify
```

$$a + b + (a - b) \sqrt{\frac{4\, c^2}{(a - b)^2} + 1}$$

$$a + b + (b - a) \sqrt{\frac{4\, c^2}{(a - b)^2} + 1}$$

Qui peuvent s'écrire:

$a+b+\operatorname{sign}(a-b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}$ et $a+b-\operatorname{sign}(a-b)\sqrt{(a-b)^2+4c^2}$.

Ainsi, si a ≥ b, on trouve

$a+b+\sqrt{(a-b)^2+4c^2}$ et $a+b-\sqrt{(a-b)^2+4c^2}$.

■ Annexe G4 : Rotation du repère:

En opérant une rotation du système d'axes Oxy selon les directions principales, le paraboloïde $z = a\,x^2 + 2\,c\,x\,y + b\,y^2$ admet une nouvelle équation du type $z = \frac{1}{2}(\rho_1 x^2 + \rho_2\,y^2)$ où ρ_1 et ρ_2 sont les courbures principales.

En mettant l'équation du paraboloïde sous forme matricielle, on voit que les courbures principales sont le double des valeurs propres de la matrice et que les directions principales sont données par les vecteurs propres de celle-ci:

Mise sous forme matricielle z = XMX:

```
M = (a c
     c b);
```

```
f[x_, y_] = {x, y}.M.{x, y} // Expand
```

$$a\,x^2+2\,c\,y\,x+b\,y^2$$

Calcul des valeurs propres de M:

```
2 * Eigenvalues[M] // FullSimplify
```

$$\left\{a+b-\sqrt{(a-b)^2+4\,c^2},\ a+b+\sqrt{(a-b)^2+4\,c^2}\right\}$$

Calcul des vecteurs propres de M, cela donne la matrice du changement de base:

```
S = Eigenvectors[M] // Transpose
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{-a+b+\sqrt{a^2-2\,b\,a+b^2+4\,c^2}}{2\,c} & -\frac{-a+b-\sqrt{a^2-2\,b\,a+b^2+4\,c^2}}{2\,c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice dans la nouvelle base:

```
P = Inverse[S].M.S // FullSimplify
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(a+b-\sqrt{(a-b)^2+4\,c^2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(a+b+\sqrt{(a-b)^2+4\,c^2}\right) \end{pmatrix}$$

Comme on peut le voir, le terme mixte en x y est nul et les coefficients quadratiques sont égaux aux demi-courbures principales.

```
f[x_, y_] = {x, y}.P.{x, y}
```

$$\frac{1}{2}\left(a+b-\sqrt{(a-b)^2+4\,c^2}\right)x^2+\frac{1}{2}\left(a+b+\sqrt{(a-b)^2+4\,c^2}\right)y^2$$

■ Annexe G5: Contact de deux solides:

Deux solides z_1 et z_2 , dans leur système d'axes Ox_1y_1 et Ox_2y_2 orientés selon leurs directions principales, ont pour équations, sous forme matricielle (annexe G3):

$$\mathbf{M1} = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_1{}' \end{pmatrix}; \ \mathbf{M2} = \begin{pmatrix} \rho_2 & 0 \\ 0 & \rho_2{}' \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{z1} = -\frac{1}{2}\,\{\mathbf{x1},\ \mathbf{y1}\}.\mathbf{M1}.\{\mathbf{x1},\ \mathbf{y1}\}$$

$$\mathbf{z2} = \frac{1}{2}\,\{\mathbf{x2},\ \mathbf{y2}\}.\mathbf{M2}.\{\mathbf{x2},\ \mathbf{y2}\}$$

$$\frac{1}{2}\left(-\rho_1\, \mathrm{x1}^2 - \mathrm{y1}^2\, \rho_1'\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\rho_2\, \mathrm{x2}^2 + \mathrm{y2}^2\, \rho_2'\right)$$

La distance entre z2 et z1 est données par h:

$$\mathbf{h = z2 - z1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\rho_1\, \mathrm{x1}^2 + \mathrm{y1}^2\, \rho_1'\right) + \frac{1}{2}\left(\rho_2\, \mathrm{x2}^2 + \mathrm{y2}^2\, \rho_2'\right)$$

Les courbures $\rho_1{}'$ et $\rho_2{}'$ sont les plus grandes en valeur absolue.
Notons φ l'angle entre les directions principales minimales.
On peut prendre $\varphi = 0$ si l'un des corps est un corps de révolution.
On va introduire un repère orthonormé commun Ouvz, Ou étant la bissectrice de Ox_1 et Ox_2.
Le premier repère va tourner de $\varphi/2$, matrice R1 et le second de $-\varphi/2$, matrice R2:

$$\mathbf{R1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Cos}[\varphi\ /\ 2] & -\mathbf{Sin}[\varphi\ /\ 2] \\ \mathbf{Sin}[\varphi\ /\ 2] & \mathbf{Cos}[\varphi\ /\ 2] \end{pmatrix}; \ \mathbf{R2} = \begin{pmatrix} \mathbf{Cos}[\varphi\ /\ 2] & \mathbf{Sin}[\varphi\ /\ 2] \\ -\mathbf{Sin}[\varphi\ /\ 2] & \mathbf{Cos}[\varphi\ /\ 2] \end{pmatrix};$$

Nouvelles expressions de z1, z2 et h:

$$\mathbf{z1} = \frac{1}{2}\,\{\mathbf{u},\ \mathbf{v}\}.\mathbf{Transpose[R1].M1.R1.}\{\mathbf{u},\ \mathbf{v}\}\ \mathbf{//\ Simplify}$$

$$\frac{1}{4}\left(2\,\rho_1'\left(v\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + u\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 + 2\left(u\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - v\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 \rho_1\right)$$

$$\mathbf{z2} = \frac{1}{2}\,\{\mathbf{u},\ \mathbf{v}\}.\mathbf{Transpose[R2].M2.R2.}\{\mathbf{u},\ \mathbf{v}\}\ \mathbf{//\ Simplify}$$

$$\frac{1}{4}\left(2\,\rho_2'\left(v\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - u\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 + 2\left(u\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + v\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 \rho_2\right)$$

$$\mathbf{h = z2 - z1\ //\ Simplify}$$

$$\frac{1}{4}\left(2\,\rho_2'\left(v\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - u\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 - 2\left(u\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - v\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 \rho_1 + 2\left(u\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + v\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 \rho_2 - 2\left(v\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + u\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 \rho_1'\right)$$

Ecrivons h sous la forme matricielle h = {u,v}.M.{u,v}:

```
M = 1/2 (Transpose[R1].M1.R1 + Transpose[R2].M2.R2) // Simplify
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left((\cos(\varphi)+1)\,\rho_1 + (\cos(\varphi)+1)\,\rho_2 - (\cos(\varphi)-1)\left(\rho_1' + \rho_2'\right)\right) & -\frac{1}{4}\sin(\varphi)\left(\rho_1 - \rho_2 - \rho_1' + \rho_2'\right) \\ -\frac{1}{4}\sin(\varphi)\left(\rho_1 - \rho_2 - \rho_1' + \rho_2'\right) & \frac{1}{4}\left(-(\cos(\varphi)-1)\,\rho_1 - (\cos(\varphi)-1)\,\rho_2 + (\cos(\varphi)+1)\left(\rho_1' + \rho_2'\right)\right) \end{pmatrix}$$

On sait, d'après un résultat précédent, qu'il est possible d'introduire un quatrième repère Oxyz, dirigé selon les vecteurs propres de la matrice M, de sorte que h s'exprime ainsi: $h = A\, x^2 + B\, y^2$.
On sait aussi que A et B sont les valeurs propres de M.

```
{B, A} = Eigenvalues[M] // FullSimplify
```

$$\left\{\frac{1}{4}\left(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1' + \rho_2' - \sqrt{\left(\rho_1^2 - 2\left(\rho_1' + \cos(2\varphi)\left(\rho_2' - \rho_2\right)\right)\rho_1 + \rho_2^2 + (\rho_1')^2 + (\rho_2')^2 + 2\cos(2\varphi)\,\rho_1'\,\rho_2' - 2\,\rho_2\left(\cos(2\varphi)\,\rho_1' + \rho_2'\right)\right)}\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{4}\left(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1' + \rho_2' + \sqrt{\left(\rho_1^2 - 2\left(\rho_1' + \cos(2\varphi)\left(\rho_2' - \rho_2\right)\right)\rho_1 + \rho_2^2 + (\rho_1')^2 + (\rho_2')^2 + 2\cos(2\varphi)\,\rho_1'\,\rho_2' - 2\,\rho_2\left(\cos(2\varphi)\,\rho_1' + \rho_2'\right)\right)}\right)\right\}$$

On peut mettre les valeurs de A et B sous la forme plus élégante suivante:

```
{newB, newA} =
  {1/4 (ρ1 + ρ2 + ρ'1 + ρ'2 - √((ρ1 - ρ'1)^2 + 2 Cos[2 φ] (ρ2 - ρ'2) (ρ1 - ρ'1) + (ρ2 - ρ'2)^2)),
   1/4 (ρ1 + ρ2 + ρ'1 + ρ'2 + √((ρ1 - ρ'1)^2 + 2 Cos[2 φ] (ρ2 - ρ'2) (ρ1 - ρ'1) + (ρ2 - ρ'2)^2))};
```

Preuve:

```
{A, B} - {newA, newB} // Simplify
```

$\{0, 0\}$

```
newA + newB // Simplify
```

$$\frac{1}{2}\left(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1' + \rho_2'\right)$$

```
newA - newB // Simplify
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\rho_1 - \rho_1')^2 + 2\cos(2\varphi)\left(\rho_2 - \rho_2'\right)\left(\rho_1 - \rho_1'\right) + \left(\rho_2 - \rho_2'\right)^2}$$

Annexe P

Elasticité: théorie générale et notations

λ et μ sont les coefficients de Lamé.

E est le module d'élasticité longitudinale.

ν est le coefficient de Poisson.

G = μ est le module d'élasticité de cisaillement (ou de glissement).

u, v et w sont les déplacements.

Le vecteur déplacement est donné par : $\vec{u} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$.

ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z sont les allongements unitaires.

ϵ est la dilatation cubique.

La résultante des forces agissant sur le volume est donné par: $\vec{X} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$.

Les allongements unitaires sont les dérivées des déplacements:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

La dilatation cubique est la somme des allongements unitaires:

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Les coefficients de Lamé sont liés aux coefficient de Poisson et au module d'élasticité longitudinale par les relations:

$$\mu = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu\,E}{(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}$$

Nous allons admettre le résultat suivant qui provient de la théorie de l'élasticité.
Les relations d'équilibres des corps solides isotropes, en supposant la loi de Hooke valide, sont données par:

$$X + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + (\lambda + \mu)\,\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0$$

$$Y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + (\lambda + \mu)\,\frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0$$

$$Z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + (\lambda + \mu)\,\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0$$

ou, sous forme vectorielle:

$$(1-2\,\nu)\,\Delta\vec{u} + \mathbf{grad}\,\epsilon = \frac{(1-2\,\nu)}{\mu}\,\vec{X}$$

ou encore, en remplaçant ϵ par la somme des dérivées des déplacements:

$$(1-2\nu)\,\Delta\vec{u} + \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} = \frac{(1-2\nu)}{\mu}\vec{X}$$

Un peu d'analyse vectorielle:

La divergence d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ est une fonction définie par:

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

Le gradient d'une fonction f(x,y,z) est le champ de vecteurs:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Le Laplacien d'une fonction f(x,y,z) est la fonction:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le Laplacien d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ est le champ de vecteurs:

$$\Delta\vec{a} = \Delta a_1\,\vec{i} + \Delta a_2\,\vec{j} + \Delta a_3\,\vec{k}$$

On a les propriétés suivantes: div $\overrightarrow{\mathrm{grad}} = \Delta$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Delta = \Delta\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}$.

L' équation différentielle aux dérivées partielles $\Delta f = 0$ s'appelle "équation de Laplace", ses solutions sont des fonctions dites "harmoniques".
L'équation plus générale Δf = g est appelée "équation de Poisson" .
Leur étude a fait l'objet de nombreuses recherches, voir, par exemple, Bass.

Si la déformation n'est pas dûe à des forces volumiques, (exemple: la pesanteur) , mais à des forces appliquées à la surface du corps uniquement, les **équations d'équilibre** deviennent:

$$(1-2\nu)\,\Delta\vec{u} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{u} = \vec{0}$$

- **Equilibre d'un milieu élastique limité par un plan**

Envisageons (voir Landau page 37) un milieu élastique occupant tout le demi-espace limité par un plan infini.
Déterminons la déformation du milieu sous l'effet de forces appliquées à sa surface libre.
La distribution de ces forces $\vec{P} = P_x\,\vec{i} + P_y\,\vec{j} + P_z\,\vec{k}$ est soumise à une seule restriction: elles tendent vers 0 loin de l'origine .

Pour résoudre l'équation d'équilibre, on va faire un postulat et rechercher les solutions qui sont du type:

$$\vec{u} = \vec{f} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi$$

où φ est une fonction scalaire et $\vec{f} = f_x\,\vec{i} + f_y\,\vec{j} + f_z\,\vec{k}$ est une fonction vectorielle vérifiant l'équation de Laplace $\Delta\vec{f} = \vec{0}$.

Prenons la surface libre comme plan Oxy et les z positifs dans la direction du milieu(= du corps).

On peut alors montrer que

$$\vec{f} = \frac{\partial g_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\vec{j} + f_z\,\vec{k}$$

et que

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\nu)}\left(f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + \psi$$

avec des fonctions harmoniques g_x , g_y , f_z et ψ.

Pour aller plus loin, il faut donner les conditions aux limites qui doivent être observées sur la surface libre du milieu (z = 0). Après quelques pages de calculs, on aboutit aux résultats suivants:(voir Landau pages 38-39)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\}\Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\nu)}{E}P_z$$

$$(1-2\nu)\, f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 4(1-\nu)\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2}\Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\nu)}{E}P_x$$

$$\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2}\Big|_{z=0} = -\frac{2(1+\nu)}{E}P_y$$

Nous allons examiner un cas particulier, celui d'une force concentrée F(x,y,z) agissant à l'origine du plan z = 0.
Des calculs assez longs aboutissent aux résultats suivants:

Le déplacement au point (x,y,z) est donné par (u_x ,u_y ,u_z) :

$$u_x = \frac{1+\nu}{2\pi E}\left\{\left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)x}{r(r+z)}\right]F_z + \frac{2(1-\nu)r+z}{r(r+z)}F_x + \frac{\left[2r(\nu r+z)+z^2\right]x}{r^3(r+z)^2}(x\,F_x + y\,F_y)\right\}$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{2\pi E}\left\{\left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)y}{r(r+z)}\right]F_z + \frac{2(1-\nu)r+z}{r(r+z)}F_y + \frac{\left[2r(\nu r+z)+z^2\right]y}{r^3(r+z)^2}(x\,F_x + y\,F_y)\right\}$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E}\left\{\left[\frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{z^2}{r^3}\right]F_z + \left[\frac{1-2\nu}{r(r+z)} + \frac{z}{r^3}\right](x\,F_x + y\,F_y)\right\}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

En se limitant aux points situés sur la surface (z = 0), on obtient:

$$u_x = \frac{1+\nu}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{-\frac{(1-2\nu)x}{r}F_z + 2(1-\nu)F_x + \frac{2\nu x}{r^2}(x\,F_x + y\,F_y)\right\}$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{-\frac{(1-2\nu)y}{r}F_z + 2(1-\nu)F_y + \frac{2\nu y}{r^2}(x\,F_x + y\,F_y)\right\}$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{2(1-\nu)F_z + (1-2\nu)\frac{1}{r}(x\,F_x + y\,F_y)\right\}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dans le cas où la force est purement normale, les résultats se simplifient encore:

$$u_x = \frac{1+\nu}{2\pi E}\left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)x}{r(r+z)}\right]F_z$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{2\pi E}\left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)y}{r(r+z)}\right]F_z$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E}\left[\frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{z^2}{r^3}\right]F_z$$

Dans le cas où la force est purement normale et n'agit que sur la surface du solide, les résultats se simplifient encore plus:

$$u_x = -\frac{1+\nu}{2\pi E} \frac{(1-2\nu)x}{r^2} F_z$$

$$u_y = -\frac{1+\nu}{2\pi E} \frac{(1-2\nu)y}{r^2} F_z$$

$$u_z = \frac{1-\nu^2}{\pi E r} F_z$$

- **Références**

Landau et Lifschitz: théorie de l'élasticité, Editions de Moscou, 1967.
V. Rékatch: problèmes de la théorie de l'élasticité, Editions de Moscou, 1980.
Timoshenko, résistance des matériaux.
K.L. Johnson Contact Mechanics 1992, pages 45, 46 et 48.
Boussinesq (1885), Cerruti (1882) et Love (1952).
J. Bass, cours de mathématiques, tome II, Masson 1964.

Annexe E0: Pression totale:

Intégrons la pression sur toute l'ellipse de contact:

$$\mathbf{p[x\_, y\_] = C * \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};}$$

$$\mathbf{int = 4 \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} p[x, y]\, dy\, dx}$$

$$\frac{2}{3} a \sqrt{\frac{1}{b^2}}\, b^2\, C\, \pi$$

```
int = Simplify[int, a > 0 && b > 0]
```

$$\frac{2}{3} a\, b\, C\, \pi$$

```
Solve[int == F, C] // First
```

$$\left\{C \to \frac{3 F}{2 a b \pi}\right\}$$

Annexe E1: Fonctions elliptiques intégrales dans *Mathematica*:

The **elliptic integral of the first kind** $F(\phi \mid m)$

is given for $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ by

$$F(\phi \mid m) = \int_0^\phi \left[1 - m \sin^2(\theta)\right]^{-1/2} d\theta = \int_0^{\sin(\phi)} \left[\left(1 - t^2\right)\left(1 - m t^2\right)\right]^{-1/2} dt$$

This elliptic integral arises in solving the equations of motion for a simple pendulum.

It is sometimes known as an incomplete elliptic integral of the first kind.

Note that the arguments of the elliptic integrals are sometimes given in the opposite order from what is used in Mathematica.

The **complete elliptic integral of the first kind K(m)**

is given by

$$K(m) = F\left(\frac{\pi}{2} \,\middle|\, m\right)$$

Note that K is used to denote the complete elliptic integral of the first kind,while F is used for its incomplete form.

In many applications, the parameter m is not given explicitly, and K(m) is denoted simply by K.

The **elliptic integral of the second kind** E(ϕ | m)

is given for $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ by

$$E(\phi \mid m) = \int_0^{\phi} \left[1 - m \sin^2(\Theta)\right]^{1/2} d\Theta = \int_0^{\sin(\phi)} \left(1 - t^2\right)^{-1/2} \left(1 - m\, t^2\right)^{1/2} dt$$

The complete elliptic integral of the second kind E(m)
is given by

$$E(m) = E\left(\frac{\pi}{2} \,\middle|\, m\right)$$

It is often denoted E.

Remarque:

Usuellement $F(\phi \mid m) = \int_0^{\phi} \left[1 - \boldsymbol{m^2} \sin^2(\theta)\right]^{-1/2} d\theta$. De même pour E et K.

Donc, pour une fonction elliptique f, on a:

$$f_{\text{mathematica}}(m^2) = f_{\text{usuelle}}(\mathtt{m})$$

Annexe E2: Intégrations et calculs de A, B et δ:

Posons $\epsilon = \epsilon 1 + \epsilon 2$.

τ varie de 0 à ∞, faisons le changement de $\tau \to t^2$, t varie aussi de 0 à ∞:

$$\texttt{integrand} = \frac{\epsilon\, 3\, F \left(-\frac{x^2}{a^2+\tau} - \frac{y^2}{b^2+\tau} + 1\right) Dt[\tau]}{4 \sqrt{\tau \left(a^2+\tau\right) \left(b^2+\tau\right)}} \;\texttt{/. } \tau \texttt{ -> } t^2 \texttt{ // Simplify // PowerExpand // Expand}$$

$$\frac{3\, F\, \epsilon\, Dt[t]}{2 \sqrt{a^2+t^2} \sqrt{b^2+t^2}} - \frac{3\, F\, x^2\, \epsilon\, Dt[t]}{2 \left(a^2+t^2\right)^{3/2} \sqrt{b^2+t^2}} - \frac{3\, F\, y^2\, \epsilon\, Dt[t]}{2 \sqrt{a^2+t^2} \left(b^2+t^2\right)^{3/2}}$$

Décomposons l'intégrant en trois termes:

```
integrand1 = integrand[[1]] / Dt[t]
integrand2 = -integrand[[2]] / Dt[t] / x^2
integrand3 = -integrand[[3]] / Dt[t] / y^2
```

$$\frac{3\,F\,\epsilon}{2\,\sqrt{a^2+t^2}\,\sqrt{b^2+t^2}}$$

$$\frac{3\,F\,\epsilon}{2\,\left(a^2+t^2\right)^{3/2}\,\sqrt{b^2+t^2}}$$

$$\frac{3\,F\,\epsilon}{2\,\sqrt{a^2+t^2}\,\left(b^2+t^2\right)^{3/2}}$$

Le calcul de la première intégrale va donner δ :

```
integrale1 = Simplify[∫_0^∞ integrand1 dt, a > 0 && b > 0]
```

$$\frac{3\,F\,\epsilon\,K\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}{2\,a}$$

Faisons apparaître l'excentricité:

```
integrale1 /. b^2 → a^2 (1 - e^2)
```

$$\frac{3\,F\,\epsilon\,K\left(e^2\right)}{2\,a}$$

Le calcul de la seconde intégrale va donner A:

```
integrale2 = Simplify[∫_0^∞ integrand2 dt, a > 0 && b > 0]
```

$$\frac{3\,F\,\epsilon\left(K\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-E\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right)}{2\left(a^3-a\,b^2\right)}$$

```
integrale2 /. b^2 → a^2 (1 - e^2) // Simplify
```

$$-\frac{3\,F\,\epsilon\left(E\left(e^2\right)-K\left(e^2\right)\right)}{2\,a^3\,e^2}$$

Le calcul de la troisième intégrale va donner B:

```
integrale3 = Simplify[∫_0^∞ integrand3 dt, a > 0 && b > 0]
```

$$\frac{3\,F\,\epsilon\left(K\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)-E\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\right)}{2\left(b^3-a^2\,b\right)}$$

```
integrale3a = integrale3 /. a → b / √(1 - e^2) // FullSimplify
```

$$\frac{3\left(e^2-1\right)F\,\epsilon\left(K\left(\frac{e^2}{e^2-1}\right)-E\left(\frac{e^2}{e^2-1}\right)\right)}{2\,b^3\,e^2}$$

Comparaisons, B peut se mettre sous la forme suivante: