

RELATIONS DES CONTACTS HERTZIENS

2004-2013

Frédy Oberson et Fred Lang¹

1 LES RELATIONS DES CONTACTS HERTZIENS

Lorsque deux solides non conformes sont mis en contact², ils se touchent initialement en un point unique ou le long d'une ligne. Sous l'action d'une force, ils se déforment, à l'endroit du premier contact, de manière à se toucher selon une surface finie, mais petite comparée aux dimensions des corps en présence. La théorie du contact se propose de prévoir l'allure de la surface de contact et l'évolution de ses dimensions en fonction de la charge appliquée, l'amplitude et la distribution des forces de surface, normales et éventuellement tangentielles, qui sont transmises au travers de l'interface et la répartition des contraintes dans les deux solides au voisinage du contact.

Avant de rappeler les résultats principaux de cette théorie, il est nécessaire de préciser la géométrie des surfaces dans la région du contact.

1.1 Modèle géométrique du contact hertzien

Chacune des surfaces est considérée comme topographiquement régulière, tant à l'échelle microscopique que macroscopique.

Sur le plan microscopique, cela signifie qu'il n'existe pas d'irrégularités des surfaces qui pourraient conduire à une discontinuité du contact ou à des variations locales importantes de la pression de contact.

Cette hypothèse n'est à l'évidence pas toujours respectée ou réalisée dans la pratique. En effet, pour des surfaces de contact de quelques dixièmes de millimètres carrés ($10^{-8}m^2$) l'état de surface des corps en présence n'est souvent pas négligeable car il est de l'ordre du centième de micron ($10^{-8}m$) pour les billes, du dixième de micron ($10^{-7}m$) pour des surfaces ayant subi une superfinition, et du micron ($10^{-6}m$) pour des surfaces rectifiées.

Du point de vue macroscopique, les profils des surfaces sont considérés comme continus jusqu'à leur seconde dérivée dans la région du contact.

Ainsi, les surfaces des deux solides 1 et 2 en contact en un seul point O , supposé non singulier, peuvent être considérées, au voisinage de ce point, comme des surfaces régulières (figure 1). Le profil de chaque surface au voisinage de l'origine O peut être approximé par (voir annexe G1) :

$$z = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + \dots \quad (1)$$

dans laquelle on néglige les termes d'ordre supérieur à deux.

En coupant un parabolôïde $z = Ax^2 + By^2 + 2Cxy$ par un plan vertical passant par O , on obtient une parabole dont la courbure va varier en fonction de la direction du plan de coupe.

Celle-ci va prendre une valeur minimale et une valeur maximale, appelées **courbures principales** (voir annexes G2 et G3). Les directions de coupe correspondantes sont les directions principales et elles sont perpendiculaires.

¹Merci à mon collègue Philippe Blanc pour ses intégrations en coordonnées ellipsoïdales.

²Hertz, âgé de 23 ans, durant Noël 1880, met au point la théorie du contact de deux solides.

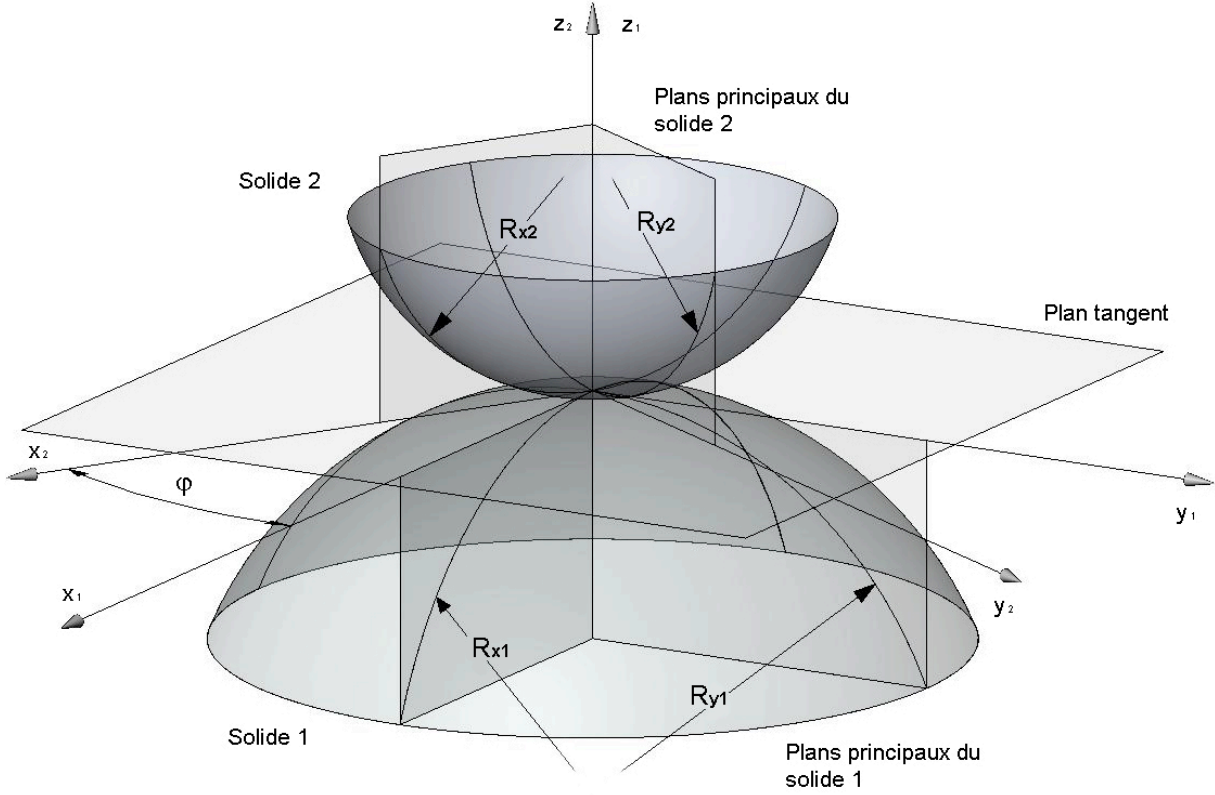


Figure 1: Géométrie générale d'un contact hertzien convexe.

En opérant une rotation autour de l'axe Oz , de sorte que le système Oxy soit orienté selon les directions principales, le parabolôide $z = Ax^2 + By^2 + 2Cxy$ admet une nouvelle équation du type (voir annexe G4) :

$$z = \frac{1}{2} (\rho_1 x^2 + \rho'_1 y^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{R_x} + \frac{y^2}{R_y} \right) \quad (2)$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les courbures des sections principales avec $|\rho'_1| \geq |\rho_1|$.

Les courbures sont comptées positivement, respectivement négativement, quand le centre de courbure correspondant est "dans le solide", respectivement "hors du solide" (figure 2).

La figure 1 illustre le cas où les quatre rayons de courbure sont positifs et on peut écrire :

$$z_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{R_{x1}} + \frac{y_1^2}{R_{y1}} \right) \quad z_2 = +\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{R_{x2}} + \frac{y_2^2}{R_{y2}} \right) \quad (3)$$

Les quantités R_{x1} , R_{x2} , R_{y1} et R_{y2} sont les **rayons de courbure principaux** des solides 1 et 2.

La distance séparant les deux surfaces s'écrit alors :

$$h = z_2 - z_1 \quad (4)$$

Il est possible (voir annexe G5) d'introduire un repère commun $Oxyz$ de sorte que h s'exprime par :

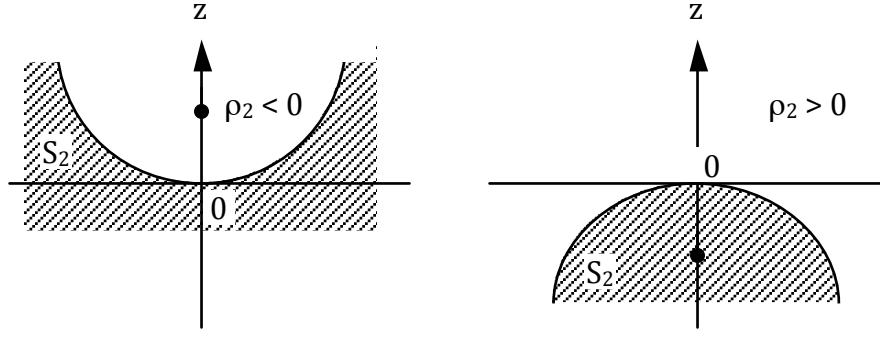


Figure 2: Convention de signes pour les courbures..

$$h = Ax^2 + By^2 = \left(\frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} \right) \quad (5)$$

avec $B \geq A \geq 0$.

On peut montrer (Johnson, [1985] ou annexe G5) que si les axes x_1 et x_2 font entre eux un angle φ , alors :

$$B + A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{y1}} + \frac{1}{R_{x2}} + \frac{1}{R_{y2}} \right) \quad (6)$$

$$B - A = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{R_{x1}} - \frac{1}{R_{y1}} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_{x2}} - \frac{1}{R_{y2}} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_{x1}} - \frac{1}{R_{y1}} \right) \left(\frac{1}{R_{x2}} - \frac{1}{R_{y2}} \right) \cos(2\varphi)}$$

Les nombres A et B sont tous deux positifs car $z_2 - z_1 \geq 0$, les points correspondant à une distance constante $z_2 - z_1$ se trouvent sur une ellipse.

Lorsque les plans principaux de chacune des surfaces du contact sont confondus, la forme géométrique des surfaces, dans la zone de contact, est définie par les rayons de courbure R_{x1} , R_{x2} , R_{y1} et R_{y2} des sections situées dans les plans principaux xOz et yOz .

La géométrie du contact "tonneau circulaire / plan" est un exemple de ce type de contact. En effet, l'angle φ de (6) est nul et l'on obtient ainsi :

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{x2}} \right) \quad (7)$$

$$B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{y1}} + \frac{1}{R_{y2}} \right)$$

qui représentent les courbures équivalentes aux surfaces en contact. En définissant les rayons de courbure :

$$R_x = \frac{1}{2A} = \left(\frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{x2}} \right)^{-1} \quad (8)$$

$$R_y = \frac{1}{2B} = \left(\frac{1}{R_{y1}} + \frac{1}{R_{y2}} \right)^{-1}$$

le contact peut être considéré comme étant celui d'un solide équivalent de courbure R_x , R_y et d'un plan (figure 3).

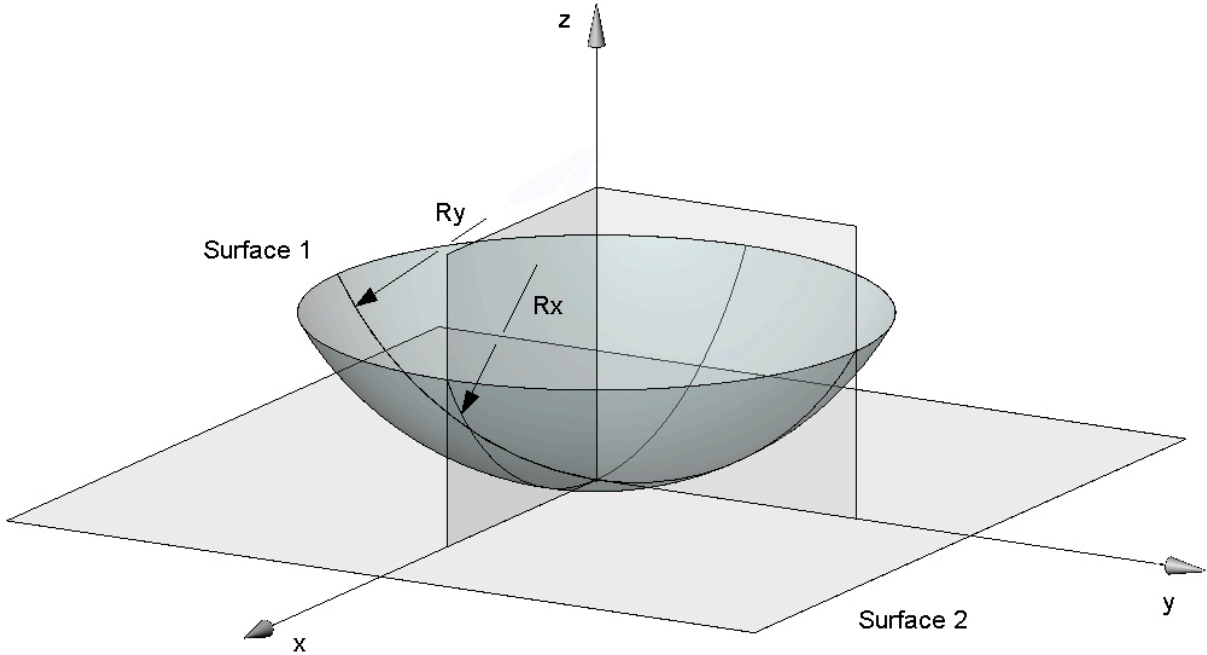


Figure 3: Modèle géométrique "tonneau circulaire/plan".

1.2 Notions de base des contacts élastiques

Considérons deux solides déformables, choisis de forme convexe pour l'exemple, et soumis à une force les pressant l'un contre l'autre. La figure 1.8 les illustre en coupe après la déformation.

Avant déformation, la distance entre les surfaces S_1 et S_2 est donnée par la relation (5). Celle-ci met en évidence une symétrie de centre O qui sera préservée lors de la déformation.

Pendant la déformation, deux points T_1 et T_2 de chacun des solides se rapprochent de O , parallèlement à l'axe Oz , des quantités δ_1 et respectivement δ_2 . Si les solides ne se déformaient pas, leurs profils se chevaucheraient comme le montrent les courbes en pointillé sur la figure 1.8.

Du fait de la pression de contact, les surfaces de chacun des solides se déplacent parallèlement à Oz des quantités δ_{z1} , et δ_{z2} (comptées positivement pour chacun des solides) par rapport aux points éloignés T_1 et T_2 .

Si, après déformation, les points T_1 et T_2 coïncident dans l'aire de contact, on peut écrire :

$$\delta_{z1} + \delta_{z2} + h = \delta_1 + \delta_2 = \delta \quad (9)$$

Puis, par (5), les déplacements élastiques satisfont la relation :

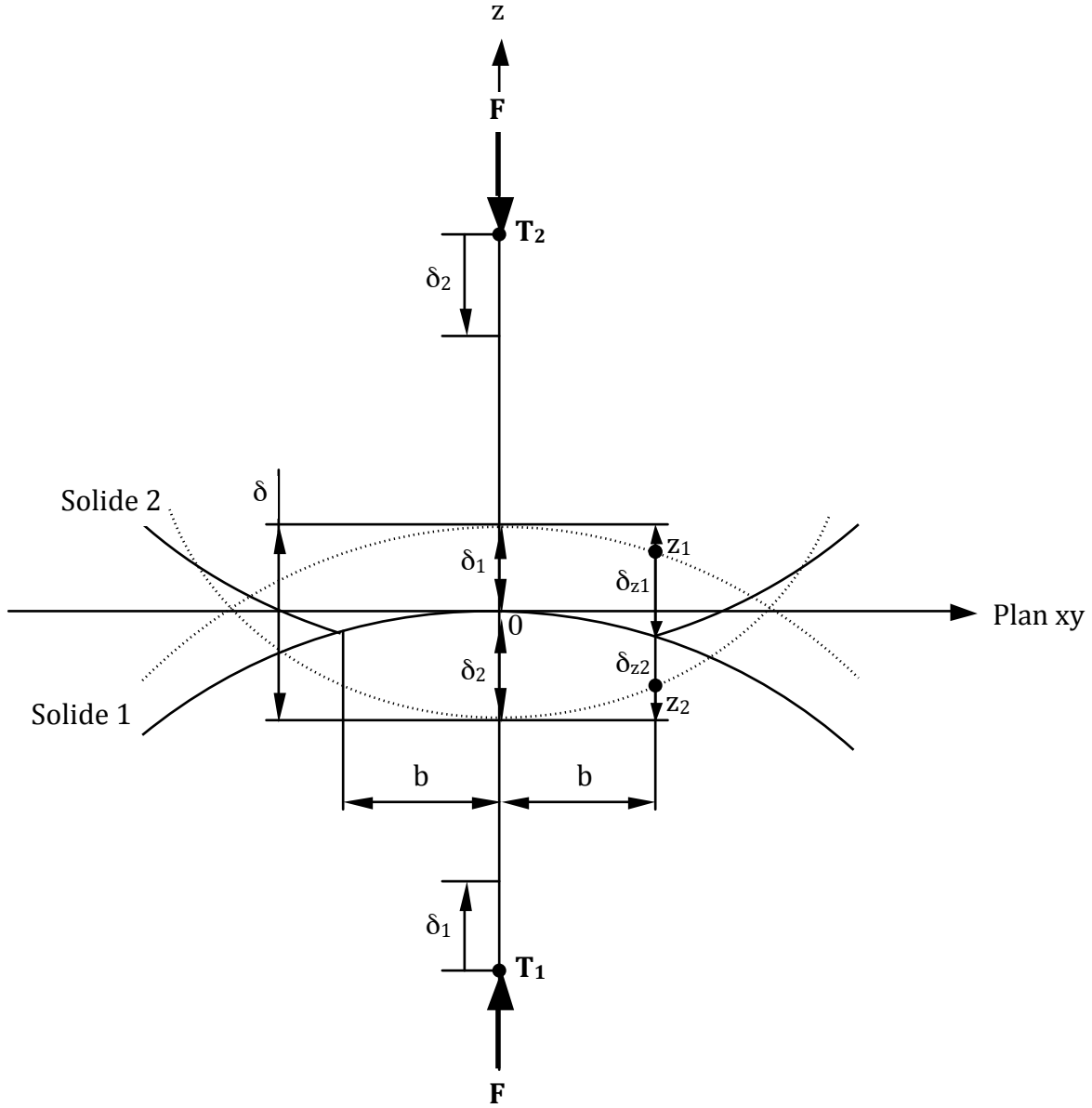


Figure 4: Déformation dans un contact hertzien.

$$\delta_{z1} + \delta_{z2} = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (10)$$

dans laquelle x et y sont les coordonnées communes de T_1 et T_2 dans le plan Oxy .

Si les points T_1 et T_2 n'appartiennent pas à l'aire de contact, il s'ensuit que :

$$\delta_{z1} + \delta_{z2} > \delta - Ax^2 - By^2 \quad (11)$$

La solution du problème consiste à déterminer la distribution de la pression transmise d'un solide à l'autre au travers de leur surface de contact de manière à ce que les déplacements élastiques résultants

satisfassent (10) dans la zone du contact et (11) en dehors.

La solution de ce problème a été obtenue théoriquement pour la première fois par Hertz en 1882, en faisant les hypothèses suivantes :

- les solides sont limités par des surfaces lisses admettant au point de contact O un plan tangent commun.
- les corps sont homogènes et isotropes.
- leur comportement est linéaire et élastique (loi de Hooke).
- les corps sont pressés l'un contre l'autre par une force dirigée selon la normale commune en O .
- la surface de contact est petite par rapport aux surfaces totales.
- le contact se fait sans frottement.
- les corps sont sans mouvement relatif.
- la surface de contact est plane.

Du point de vue de l'élasticité, le problème peut être formulé comme la recherche de la distribution de la pression mutuelle $p(x, y)$, agissant sur une surface S de deux demi-espaces élastiques, qui provoque les déplacements normaux δ_{z1} et δ_{z2} satisfaisant la relation (10) à l'intérieur de S et la relation (11) à l'extérieur.

1.3 Contact de profils quelconques

Les déformations d'un milieu élastique occupant tout le demi-espace limité par un plan, sous l'effet d'une force concentrée F , appliquée à sa surface libre et agissant à l'origine, dans le cas où celle-ci est purement normale, sont données par (annexe P) :

$$\delta_x = -\frac{1 + \nu}{2\pi E} \cdot \frac{(1 - 2\nu)x}{r^2} \cdot F \quad (12)$$

$$\delta_y = -\frac{1 + \nu}{2\pi E} \cdot \frac{(1 - 2\nu)y}{r^2} \cdot F \quad (13)$$

$$\delta_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E r} \cdot F \quad (14)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Les relations ci-dessus sont applicables pour étudier les déformations locales de deux profils quelconques appuyés l'un contre l'autre suivant la normale en O .

En remplaçant dans la relation (14) F par $dF = p(\xi, \zeta)d\xi d\zeta$, on obtient :

$$d\delta_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E r} \cdot p(\xi, \zeta)d\xi d\zeta \quad (15)$$

où $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2}$.

Pour obtenir δ_z dans le cas d'un **contact étendu** à une certaine région, il faut invoquer le principe de superposition, valable sous l'hypothèse de la loi de Hooke et intégrer :

$$\delta_z = \int \int \frac{1 - \nu^2}{\pi E r} \cdot p(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int \int \frac{1}{r} \cdot p(\xi, \zeta) d\xi d\zeta \quad (16)$$

l'intégrale étant prise sur toute la surface de contact.

Appliquée à notre cas [formule (10)], pour chacun des deux corps, on obtient :

$$\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \int \int \frac{1}{r} \cdot p(\xi, \zeta) d\xi d\zeta + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \int \int \frac{1}{r} \cdot p(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (17)$$

En posant :

$$\epsilon_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \quad \text{et} \quad \epsilon_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \quad (18)$$

la relation (17) devient :

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2) \int \int \frac{1}{r} \cdot p(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (19)$$

Cette équation intégrale détermine la distribution de la pression dans la région de contact. On peut trouver sa solution par analogie avec une relation identique connue en théorie du potentiel. Cette relation s'écrit :

$$\iint_{(\mathbb{E})} \frac{1}{r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{b}\right)^2} d\xi d\zeta = \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \frac{-\frac{x^2}{a^2 + \tau} - \frac{y^2}{b^2 + \tau} + 1}{\sqrt{(a^2 + \tau)(b^2 + \tau)\tau}} d\tau \quad (20)$$

où $(x, y) \in (\mathbb{E})$, intérieur de l'ellipse de demi-axes a, b .

En comparant les relations (19) et (20), on voit que leurs seconds membres contiennent des fonctions quadratiques de x et de y de même forme et des intégrales de même type figurent dans les premiers membres. On en conclut que la surface de contact des corps est une ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et que la fonction $p(x, y)$ est de la forme :

$$p(x, y) = \text{const} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (21)$$

La constante est déterminée de sorte que l'intégrale $\int \int p(x, y) dx dy$ étendue à la surface de contact soit égale à la force totale F .

En intégrant, on détermine la constante (annexe E0) :

$$p(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (22)$$

Notons que la pression atteint son maximum au centre ($x = y = 0$) et vaut :

$$p_{max} = \frac{3F}{2\pi ab} \quad (23)$$

La pression moyenne est égale à la force totale F divisée par l'aire πab de l'ellipse, elle vaut donc :

$$p_{moy} = \frac{F}{\pi ab} \quad (24)$$

Et la comparaison de (23) et (24) donne :

$$p_{max} = \frac{3}{2} \cdot p_{moy} \quad (25)$$

Substituons $p(x, y)$ dans (19), il vient :

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \frac{3F}{2\pi ab} \int \int \frac{1}{r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{b}\right)^2} d\xi d\zeta = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (26)$$

Et en utilisant (20), on obtient finalement :

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \frac{3F}{2\pi ab} \cdot \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \frac{-\frac{x^2}{a^2+\tau} - \frac{y^2}{b^2+\tau} + 1}{\sqrt{(a^2+\tau)(b^2+\tau)}\tau} d\tau = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (27)$$

Cette égalité a lieu pour tout point de l'ellipse de contact ce qui entraîne l'égalité des coefficients de x , y et des termes constants dans les deux membres de l'équation ci-dessus. On peut écrire :

$$\delta = (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \frac{3F}{4} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(a^2+\tau)(b^2+\tau)}\tau} d\tau \quad (28)$$

$$A = (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \frac{3F}{4} \int_0^\infty \frac{1}{(a^2+\tau)\sqrt{(a^2+\tau)(b^2+\tau)}\tau} d\tau \quad (29)$$

$$B = (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \frac{3F}{4} \int_0^\infty \frac{1}{(b^2+\tau)\sqrt{(a^2+\tau)(b^2+\tau)}\tau} d\tau \quad (30)$$

L'intégration fait appel aux fonctions elliptiques K et E (annexe E1).

En intégrant (annexe E2), on trouve :

$$\delta = (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \frac{3F}{2a} \cdot K(e) \quad (31)$$

$$A = (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \frac{3F}{2a^3} \cdot \frac{K(e) - E(e)}{e^2} \quad (32)$$

$$B = (\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot \frac{3F}{2b^3} \cdot \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot (E(e) - (1-e^2)K(e))}{e^2} \quad (33)$$

où

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (34)$$

est l'excentricité de l'ellipse.

Le calcul de $\frac{A}{B}$ et la substitution

$$\frac{b^3}{a^3} \rightarrow (1 - e^2)^{3/2}$$

donne l'équation de Hertz et la définition de la fonction H de Hertz:

$$H(e) = \frac{A}{B} = \frac{(1 - e^2) \cdot (E(e) - K(e))}{(1 - e^2) \cdot K(e) - E(e)} \quad (35)$$

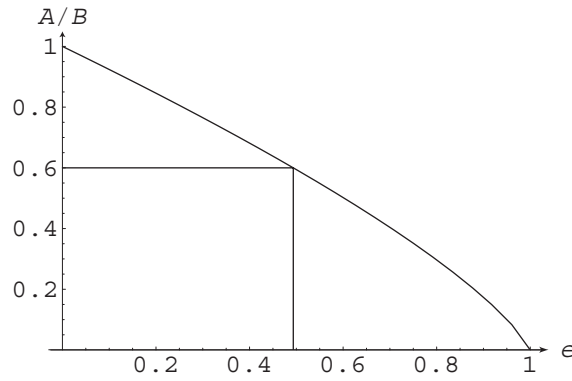


Figure 5: Fonction de Hertz: $H(e) = \frac{A}{B}$.

En résolvant les équations (31), (32) et (33) et en posant

$$d = \frac{3}{2} F(\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

on obtient

$$a^3 = \frac{d(K(e) - E(e))}{e^2 A} \quad (36)$$

$$b^3 = \frac{d\sqrt{1 - e^2}(E(e) - (1 - e^2)K(e))}{e^2 B} \quad (37)$$

$$\delta^3 = \frac{d^2 e^2 A K(e)^3}{K(e) - E(e)} \quad (38)$$

De plus

$$p_{max} = \frac{3F}{2\pi ab} \quad (39)$$

Marche à suivre pratique:

- Les courbures A et B sont données par la géométrie (formules (6) et (7)).
- e peut être calculé par l'équation de Hertz (voir figure 5).
- Ensuite a , b et δ sont donnés par les équations (36), (37) et (38).

On introduit aussi les fonctions³ $\alpha = \alpha(e)$, $\beta = \beta(e)$, $\gamma = \gamma(e)$ et $\lambda = \lambda(e)$ définies par :

$$\alpha^3 = \frac{2E(e)}{\pi(1 - e^2)} \quad (40)$$

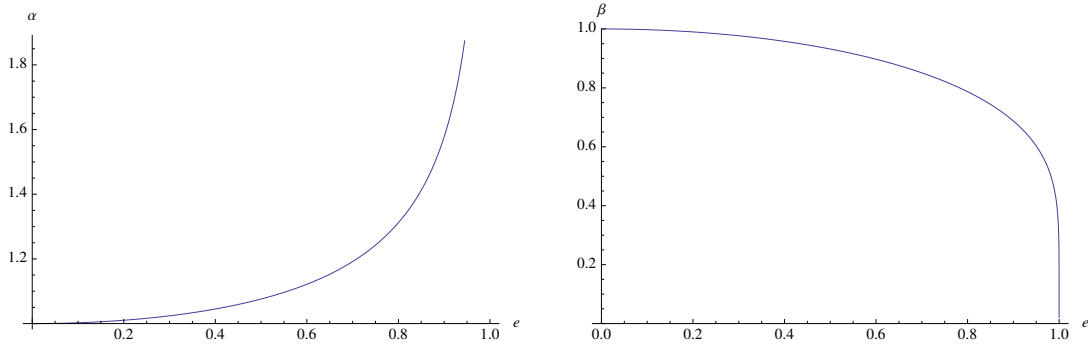


Figure 6: Fonctions $\alpha = \alpha(e)$ et $\beta = \beta(e)$.

$$\beta^3 = \frac{2\sqrt{1 - e^2} E(e)}{\pi} \quad (41)$$

$$\gamma^3 = \frac{\pi^2 \sqrt{1 - e^2}}{4E(e)^2} \quad (42)$$

Remarquons que

$$\gamma = \frac{1}{\alpha\beta}$$

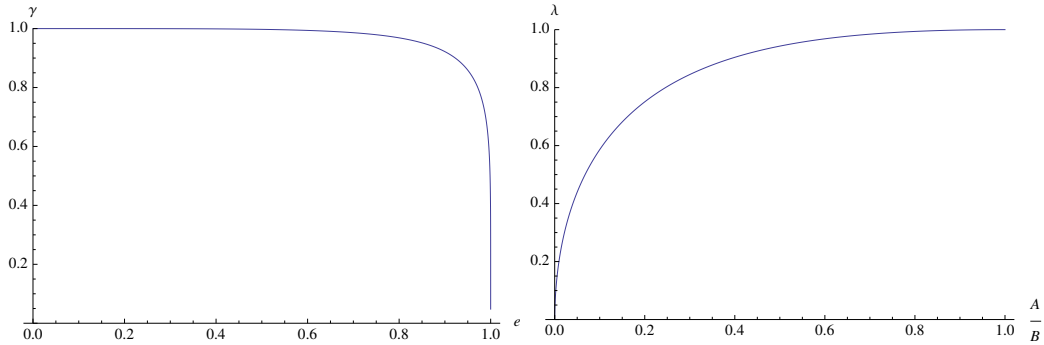


Figure 7: Fonctions $\gamma = \gamma(e)$ et $\lambda = \lambda(e)$.

³Hertz utilisait les notations $m = \alpha$, $n = \beta$, $r = \lambda$.

$$\lambda^3 = \frac{4(1 - e^2) K(e)^3}{\pi^2 E(e)} \quad (43)$$

qui permettent, en utilisant la relation de Hertz, d'exprimer les valeurs de a, b et δ sous cette forme:

$$a^3 = \frac{\pi d \alpha^3}{2(A + B)} \quad (44)$$

$$b^3 = \frac{\pi d \beta^3}{2(A + B)} \quad (45)$$

$$\delta^3 = \frac{(A + B) \pi^2 d^2 \lambda^3}{4} \quad (46)$$

$$p_{max}^3 = \frac{27(A + B)^2 F^3 \gamma^3}{2\pi^5 d^2} \quad (47)$$

On a aussi

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - e^2} \quad (48)$$

1.4 Tables

Pour éviter de passer par le calcul de l'excentricité e , il est possible tabuler les fonctions précédentes directement en fonction de $\frac{A}{B}$, les valeurs de a, b, δ, p_{max} sont ensuite données par les formules (44), (45), (46) et (47).

$\frac{A}{B}$	α	β	γ	λ
1.	1.	1.	1.	1.
0.95	1.01732	0.98312	0.999854	0.999854
0.9	1.03606	0.965789	0.999384	0.999384
0.85	1.05643	0.947969	0.998536	0.998535
0.8	1.07869	0.929615	0.997244	0.997242
0.75	1.10313	0.910676	0.995431	0.995426
0.7	1.13013	0.89109	0.993	0.992988
0.65	1.16019	0.870783	0.989834	0.989808
0.6	1.19391	0.849665	0.985786	0.985735
0.55	1.23209	0.827626	0.98067	0.980576
0.5	1.27582	0.804527	0.974248	0.974082
0.45	1.32656	0.78019	0.966211	0.965925
0.4	1.38639	0.75438	0.956143	0.955661
0.35	1.45838	0.726774	0.943473	0.942672
0.3	1.54724	0.696916	0.927386	0.926062
0.25	1.66077	0.664119	0.906661	0.904473
0.2	1.81294	0.627275	0.879344	0.875687
0.15	2.03231	0.584399	0.841976	0.835711
0.1	2.39048	0.531284	0.787386	0.776094
0.05	3.15704	0.455648	0.69517	0.672342

1.5 Contact entre deux corps de révolution

Dans ce cas, les courbures sont égales

$$\rho'_1 = \rho_1 = \frac{1}{R_1} \quad \rho'_2 = \rho_2 = \frac{1}{R_2}$$

Ce qui implique

$$A = B = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) = \frac{1}{2} \rho = \frac{1}{2} \frac{1}{R}$$

où ρ est la courbure relative et R le rayon de courbure relatif.

On a alors, d'après le graphe de la fonction de Hertz:

$$\frac{A}{B} = 1 \Rightarrow e = 0$$

Quelques calculs de limites donnent et des substitutions nous permettent de retrouver les résultats de Johnson (page 93):

$$a^3 = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{d(K(e) - E(e))}{e^2 A} = \frac{\pi}{4} \frac{d}{A} = \frac{3FR}{4E^*} \quad (49)$$

où

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

$$b^3 = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{d\sqrt{1-e^2}(E(e) - (1-e^2)K(e))}{e^2 B} = \frac{\pi}{4} \frac{d}{B} = a^3 \quad (50)$$

$$\delta^3 = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{d^2 e^2 A K(e)^3}{K(e) - E(e)} = \frac{\pi^2}{2} d^2 A = \frac{9F^2}{16RE^{*2}} = \frac{a^6}{R^2} \quad (51)$$

$$p_{max}^3 = \frac{3F}{2\pi a^2} = \frac{6FE^{*2}}{\pi^3 R^2} \quad (52)$$

Ces formules sont les mêmes pour deux cylindres perpendiculaires et de mêmes rayons.

1.6 Contact entre deux cylindres parallèles

Il vaut mieux refaire les calculs, nous reprenons les résultats de Johnson page 99.

Prenons Oy comme ligne de contact des cylindres et notons F la force par unité de longueur.

Le contact se fait le long d'une bande le long de l'axe Oy de largeur $2a$ avec

$$a^2 = \frac{4FR}{\pi E^*} \quad (53)$$

où R et E^* sont définis au paragraphe précédent.

La pression étant alors

$$p(x) = \frac{2F}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (54)$$

La pression maximale est au centre

$$p_{max} = \frac{2F}{\pi a} = \frac{4}{\pi} p_m = \sqrt{\frac{FE^*}{\pi R}} \quad (55)$$

où p_m est la pression moyenne.

Ces formules restent valables si un des cylindre est remplacé par un plan, on prend le second rayon de courbure infini.

1.7 Contact entre deux cylindres de mêmes rayons à 45 degrés

En partant de la théorie générale, on arrive aux résultats suivant:

Soit R le rayon commun des cylindres, posons

$$r^3 = F(\epsilon_1 + \epsilon_2)R$$

alors

$$a \approx 2,56 r \quad b \approx 0,80 r \quad \frac{a}{b} \approx 3,19 \quad e \approx 0,95 \quad \delta \approx 1,51 \frac{r^2}{R} \quad (56)$$

La pression maximale est au centre

$$p_{max} \approx 0,232 \frac{F}{r^2} \quad (57)$$

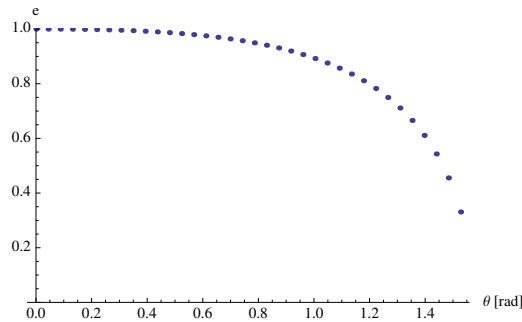
1.8 Contact entre deux cylindres de mêmes rayons R , variation de l'angle θ

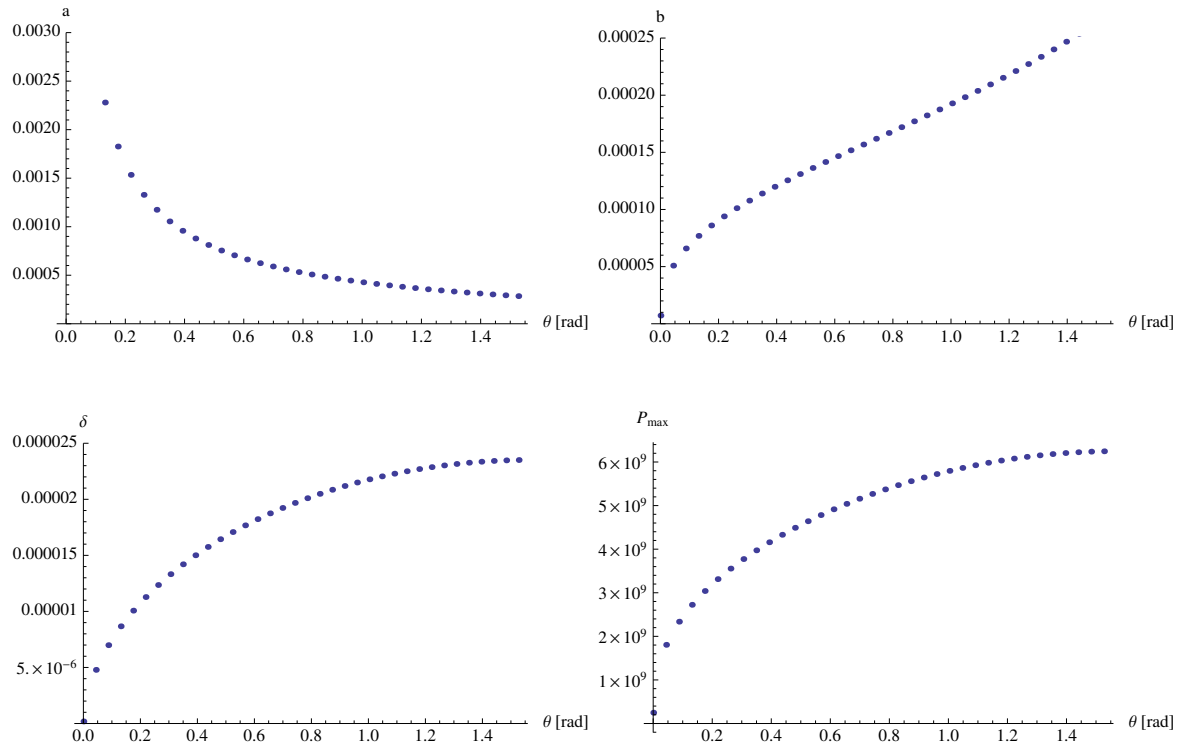
Prenons, en unités SI:

$$R = 3,25 \cdot 10^{-3} \quad E_1 = E_2 = 10^9 \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.3 \quad P = 1000$$

Nous allons faire varier l'angle θ entre les deux cylindres de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

e est l'excentricité, a, b des demi-axes, $\lambda = \frac{b}{a}$, δ l'écrasement et P_{max} la pression maximale (au centre).





2 Bibliographie

Landau et Lifschitz: théorie de l'élasticité, Editions de Moscou, 1967.

V.Rékatch: problèmes de la théorie de l'élasticité, Editions de Moscou, 1980.

Timoshenko.

K.L. Johnson Contact Mechanics 1992, pages 45, 46 et 48.

Boussinesq (1885), Cerruti (1882) et Love (1952).

J. Bass, cours de mathématiques, tome II, Masson 1964.

M. Foulon et A. Rey, Revue française de mécanique, 1985/4.

Johnson, K.L., 1985, Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.

Pahud, P., Lubrification thermoelastohydrodynamique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.