

LA CONVERGENCE DE LA MÉTHODE DE NEWTON DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NON-LINÉAIRES

Lang Fred, 1998

Résumé

Cet article donne un aperçu, à l'aide de quelques exemples, de la convergence globale de la méthode de Newton pour des équations polynômiales, dans les cas réels et complexes

1 Introduction

L'ingénieur utilise de plus en plus de logiciels de calcul numérique faisant appel à des méthodes itératives de résolutions d'équations, se pose alors le problème de la validité des résultats, autrement dit de la convergence des algorithmes. L'algorithme de Newton est un des plus simples et pourtant il permet déjà d'appréhender la complexité des phénomènes itératifs.

2 L'algorithme

Nous allons décrire l'algorithme pour une équation non-linéaire

$$f(x) = 0$$

Celui-ci se généralise à des systèmes.

Nous allons l'illustrer¹ en résolvant une équation² de degré 3 dont les solutions sont connues, -1, 0 et 1:

$$f(x) = x^3 - x = 0$$

La méthode est la suivante:

1. Choix d'une valeur initiale x_0 (estimation de la solution de l'équation), $n = 0$.
2. Calcul de la tangente au graphe au point $(x_n; f(x_n))$
3. Calcul du point d'intersection $(x_{n+1}; 0)$ de la tangente avec l'axe Ox .
4. Si les critères d'arrêt ne sont pas satisfaits: retour au point 2) en posant $n := n + 1$.

Exemples de critères d'arrêt:

$$|f(x_{n+1})| < 10^{-6}$$

ou

$$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$$

ou

$$n < n_{max}$$

¹les résultats qui suivent sont valables pour toute équation polynômiale.

²Cayley, mathématicien anglais, a étudié le premier ce problème en 1890: "Sur les racines d'une équation algébrique". CRAS 110, 215-218.

Quelques calculs donnent la formule de récurrence suivante:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ainsi, l'algorithme conduit à itérer la fonction rationnelle:

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}$$

Prenons par exemple $x_0 = -2$, on obtient une suite d'itérés x_n qui converge vers -1:

$$\begin{bmatrix} x_0 & = & -2 \\ x_1 & \approx & -1.45 \\ x_2 & \approx & -1.15 \\ x_3 & \approx & -1.02 \\ x_4 & \approx & -1.0009 \\ x_5 & \approx & -1.000001 \\ x_6 & \approx & -1.000000000002 \\ x_7 & \approx & -1 \\ x_8 & \approx & -1 \\ x_9 & \approx & -1 \end{bmatrix}$$

illustrée par la figure (1). (Nous encourageons vivement le lecteur à faire quelques dessins d'itérations).

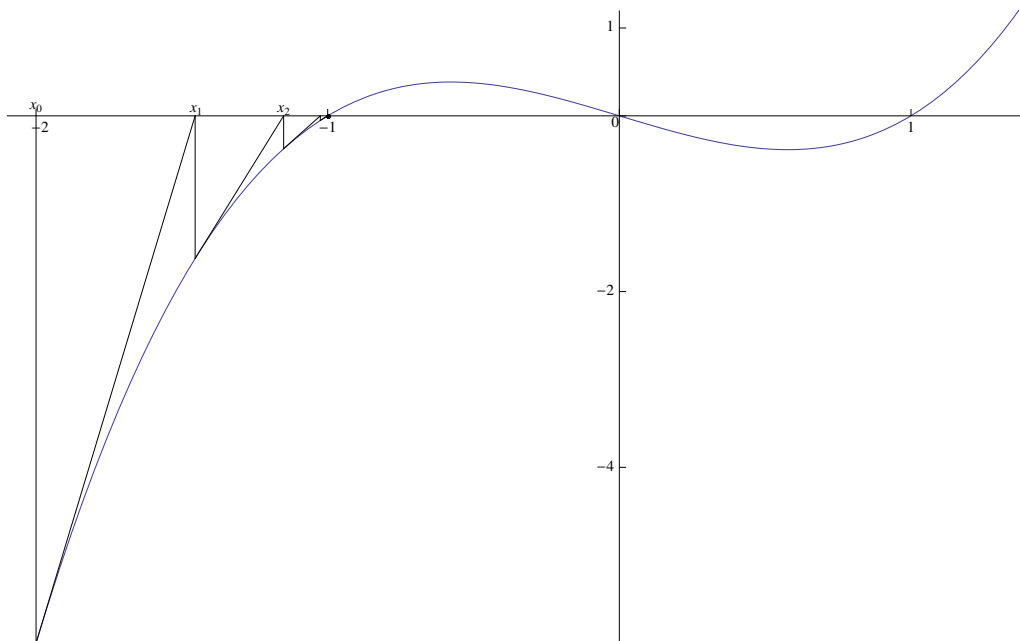


Figure 1: $f(x) = x^3 - x = 0$ avec $x_0 = -2$.

L'exemple qui suit laisse entrevoir les problèmes possibles (fig. (2)), en partant de $x_0 = -0.4475$, on obtient la suite

$$\begin{bmatrix} x_0 = -0.4475 \\ x_1 \approx +0.4489 \\ x_2 \approx -0.4577 \\ x_3 \approx +0.5161 \\ x_4 \approx -1.3699 \\ x_5 \approx -1.0146 \\ x_6 \approx -1.0003 \\ x_7 \approx -1 \\ x_8 \approx -1 \\ x_9 \approx -1 \end{bmatrix}$$

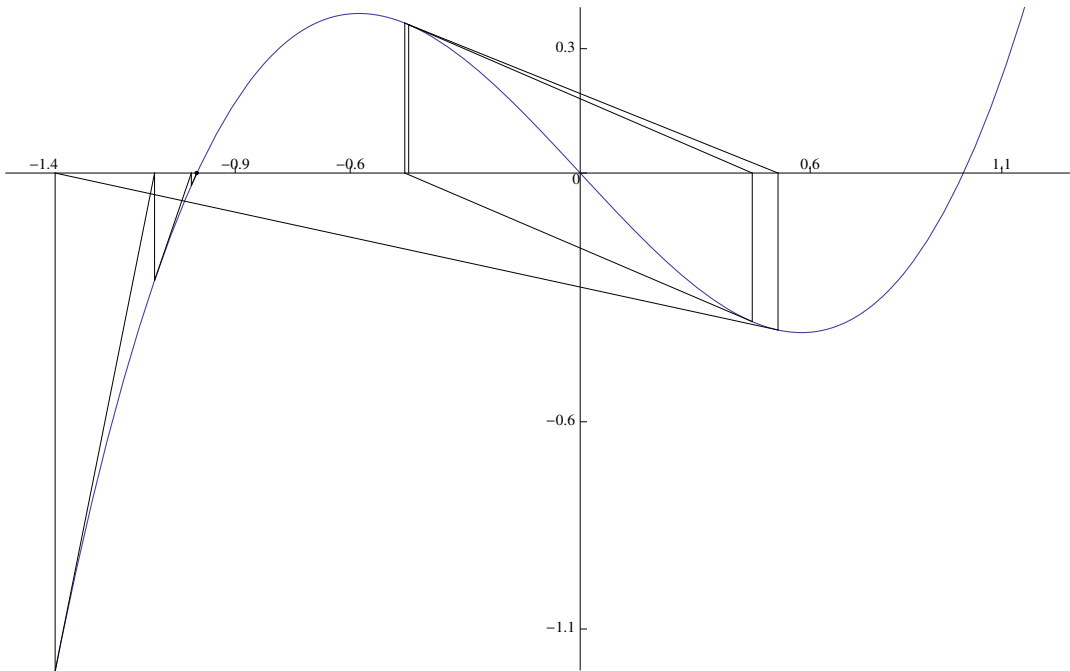


Figure 2: $f(x) = x^3 - x = 0$ avec $x_0 = -0.4475$.

La constatation suivante s'impose:

l'algorithme ne fonctionnera pas si la suite x_n tend vers l'infini (suite aboutissant sur l'abscisse d'un extremum) **ou si la suite engendre un cycle.**

Par exemple, l'équation

$$(x + 2)(x + 0.46) = 0$$

avec $x_0 = -0.6858$, donne une suite d'itérés x_n qui engendre un cycle de longueur 3:

$$N(x_0) = x_1 = 0.7160, \quad N(x_1) = x_2 = 0.1726, \quad N(x_2) = x_0$$

Le graphe de la figure (3) donne une idée du phénomène.

On introduit les définitions suivantes:

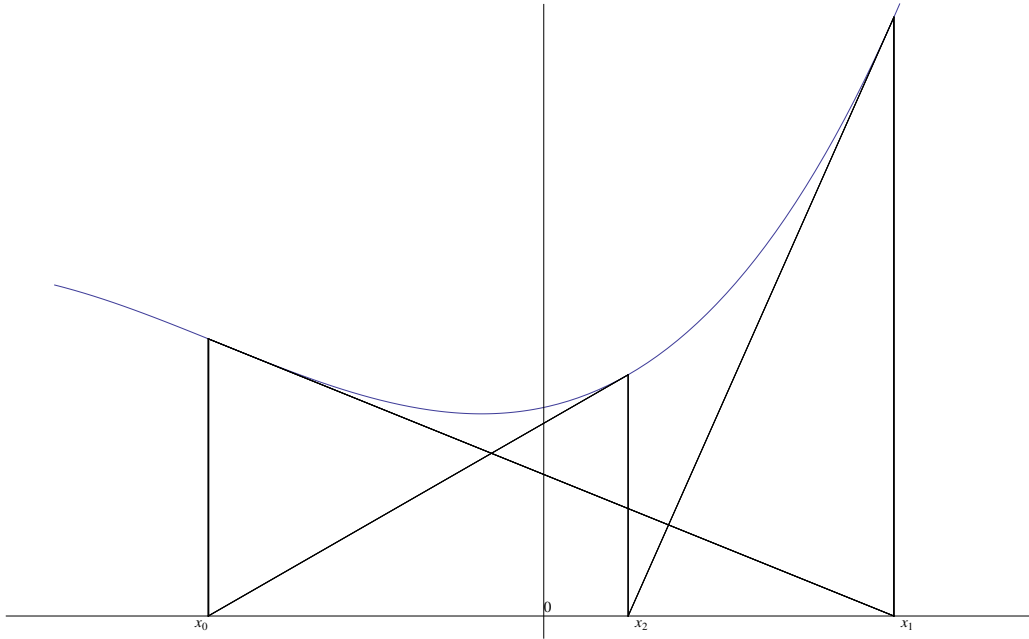


Figure 3: $f(x) = x^3 - x = 0$ avec $x_0 = -0.4475$.

- Le **bassin d'attraction** $A(s)$ d'une solution s de l'équation $f(x) = 0$, est l'ensemble des x_0 dont la suite des itérés x_n converge vers s .
- Le **bassin d'attraction de l'infini**, $A(\infty)$, est l'ensemble des x_0 tels que $x_n \rightarrow \infty$.
- L'**ensemble de Julia**³, $J(f)$, de $f(x)$ est formé de $A(\infty)$ et des limites de suites de points de $A(\infty)$. (En topologie, on appelle cela la clôture de $A(\infty)$).
C'est aussi la frontière des valeurs x_0 pour laquelle la suite des x_n est bornée.
C'est en général un ensemble fractal qui n'est facile à visualiser!
- Notons encore $Per(f)$, l'ensemble des x_0 engendrant un cycle.

Question:

Existe-t-il des **intervalles de divergence**, c'est-à-dire, des intervalles dont tous les éléments x_0 engendrent des suites x_n divergentes ou des cycles?

Les résultats suivants peuvent être établis:

- $A(\infty)$ est formé des préimages par $N(x)$ des abscisses des extrema de $f(x)$.
- $A(\infty)$ est un ensemble infini discret. Les points de $J(f)$ sont tous des points de divergence.
- Dans chaque bassin $A(s)$, il existe un intervalle ouvert contenant s , sur lequel la convergence est quadratique (à chaque itération, le nombre de décimales exactes de x_n est doublé!).

³Julia et Fatou sont des mathématiciens français du début du 20ème siècle qui ont étudié ces questions.

- Si $f(x)$ admet un 3-cycle⁴, alors $f(x)$ admet des n -cycles⁵ pour tout $n \geq 3$.
- Si $f(x)$ n'a que des solutions réelles, alors il n'y a pas d'intervalle de divergence.⁶

Reprenons le premier exemple, $f(x) = x^3 - x = 0$, les trois solutions sont 0 et ± 1 . Colorions en rouge le bassin de 0, en bleu celui de -1 et en vert celui de 1, en noir le graphe de la fonction. Nous obtenons alors la figure (4).

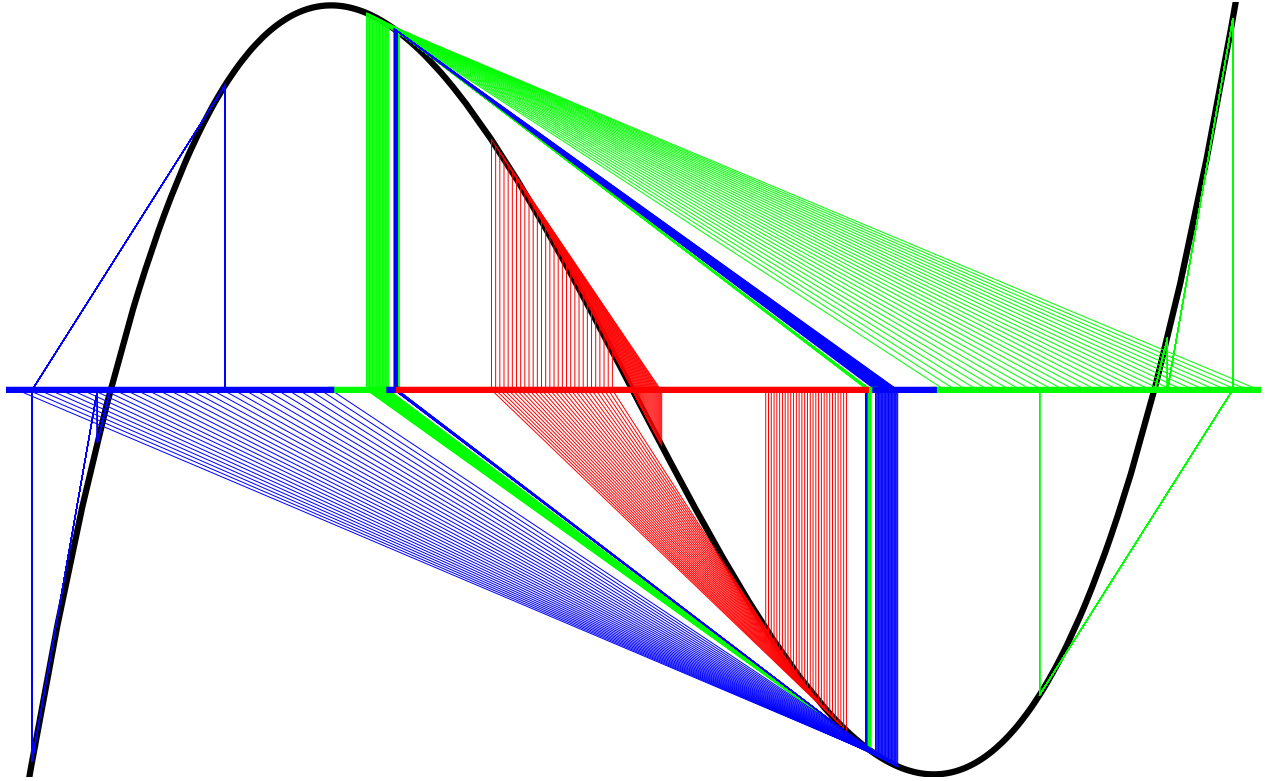


Figure 4: En noir, la courbe $y = f(x) = x^3 - x = 0$, elle coupe l'axe Ox en 0, bassin rouge, -1, bassin bleu et 1, bassin vert.

Le bassin rouge est un intervalle $]a; b[=] - \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}[\approx] - 0.447; 0.447[$ dont les bords forment un 2-cycle, $N(a) = b$ et $N(b) = a$.

Les bassins bleu et vert s'étalent à l'infini, à gauche du maximum et à droite du minimum de la fonction, respectivement.

Aux alentours de a et de b , les bassins bleu et vert s'entrecroisent indéfiniment. (bleu-vert-bleu-vert-bleu...en une suite d'intervalles de diamètres tendant vers 0).

En choisissant une valeur initiale x_0 proche de a ou de b , la suite des itérés peut converger vers l'une quelconque des trois solutions.

⁴"Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself". A. N. Sharkovsky. Ukrainian Mat. Z. 1964.

⁵"Period three implies chaos". Tien-Yien Li and James A. Yorke. American Monthly 1975.

⁶"Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen III". Béla Barna. Publ. Math Debrecen 1960.

3 L'algorithme de Newton complexe

Permettre à la variable x de prendre des valeurs complexes, conduit à examiner la méthode de Newton pour des équations $f(z) = 0$ à coefficients et à variable complexes.

L'algorithme est le même, mais nous entrons dans la théorie générale des itérations des fonctions d'une variable complexe, étudiée par des mathématiciens au début du 20ème siècle (Julia, Fatou) et plus récemment par John Hubbard, Douady, Milnor, etc...

Mandelbrot a obtenu de manière empirique des résultats spectaculaires à l'ordinateur, qui sont maintenant devenus très populaires (fractales, chaos ...).

Cette théorie générale donne un nouvel éclairage à l'algorithme de Newton réel.

Considérons l'équation⁷

$$z^5 - 10z^3 + 69z = 0$$

elle admet la solution réelle 0 et 4 solutions complexes: $\pm 2,5794 \pm 1,2858i$.

Colorions, dans le plan complexe, en rouge le bassin de 0, en violet, bleu, jaune et vert les quatre autres. Les domaines de divergence sont en noir.

Donc toute valeur z_0 dans la zone rouge donnera une suite z_n convergeant vers 0, toute valeur z_0 dans la zone violette engendrera une suite z_n convergeant vers $2,5794 + 1,2858i$, etc...

Les images sont données avec leurs fenêtres, $z_0 = x_0 + iy_0$.

L'ensemble de Julia $J(f)$ est formé par les bords des bassins, c'est un ensemble fractal.

$Per(f)$ est en noir, ce sont les valeurs engendrant des cycles.

Ce polynôme a une infinité d'intervalles de divergence réels, en particulier, $[1.60, 1.73]$ qui est la coupe réelle de la grosse boule noire.

4 Conclusion

Pour la convergence de l'algorithme, l'ensemble de Julia a une importance limitée, car, étant un ensemble fractal, il suffit de "bouger" un peu z_0 pour obtenir une suite convergente, mais la valeur obtenue n'est peut-être pas celle désirée.

Par contre, l'ensemble $Per(f)$ crée un vrai problème de convergence.

L'analyse numérique et le bon sens se complèteront pour interpréter les résultats des algorithmes numériques.

Les prévisions météorologiques mensuelles ne sont pas pour demain...

⁷A. Rényi est le premier, à ma connaissance, à avoir trouvé un polynôme ayant un intervalle (domaine dans les complexes) de divergence. "A Newton-féle gyökközélető eljárásról. Mat. Lapok 1. 1950. (On Newton's Method of approximation)

5 Références

- Beardon Alan F. "Iteration of Rational Functions". 1991.
- "Chaos and Fractals". Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol 39. 1988.
- Curry J.H., Garnett L. and Sullivan D. "On the Iteration of a Rational Function: Computer Experiments with Newton's method". Commun.Math.Phys. 91. 1983.
- Keen L. and Douady A. "Complex Dynamical Systems". Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol 49. 1994.
- Devaney Robert L. "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems".
- Straffin Philip. "Newton's method and fractal patterns in Applications of Calculus". 1993.
- Steinmetz Norbert. "Rational Iteration". 1993.
- Walsh James A. "The Dynamics of Newton's Method for Cubic Polynomials", College Math. J. 1995.

Les premières images ont été créées avec le logiciel Mathematica, les dernières sur le site internet <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/newton/newton.html>.

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/newton/newtongen.html>.

Notons que ces URL sont les mêmes depuis 15 ans et donnent toujours d'aussi magnifiques dessins.

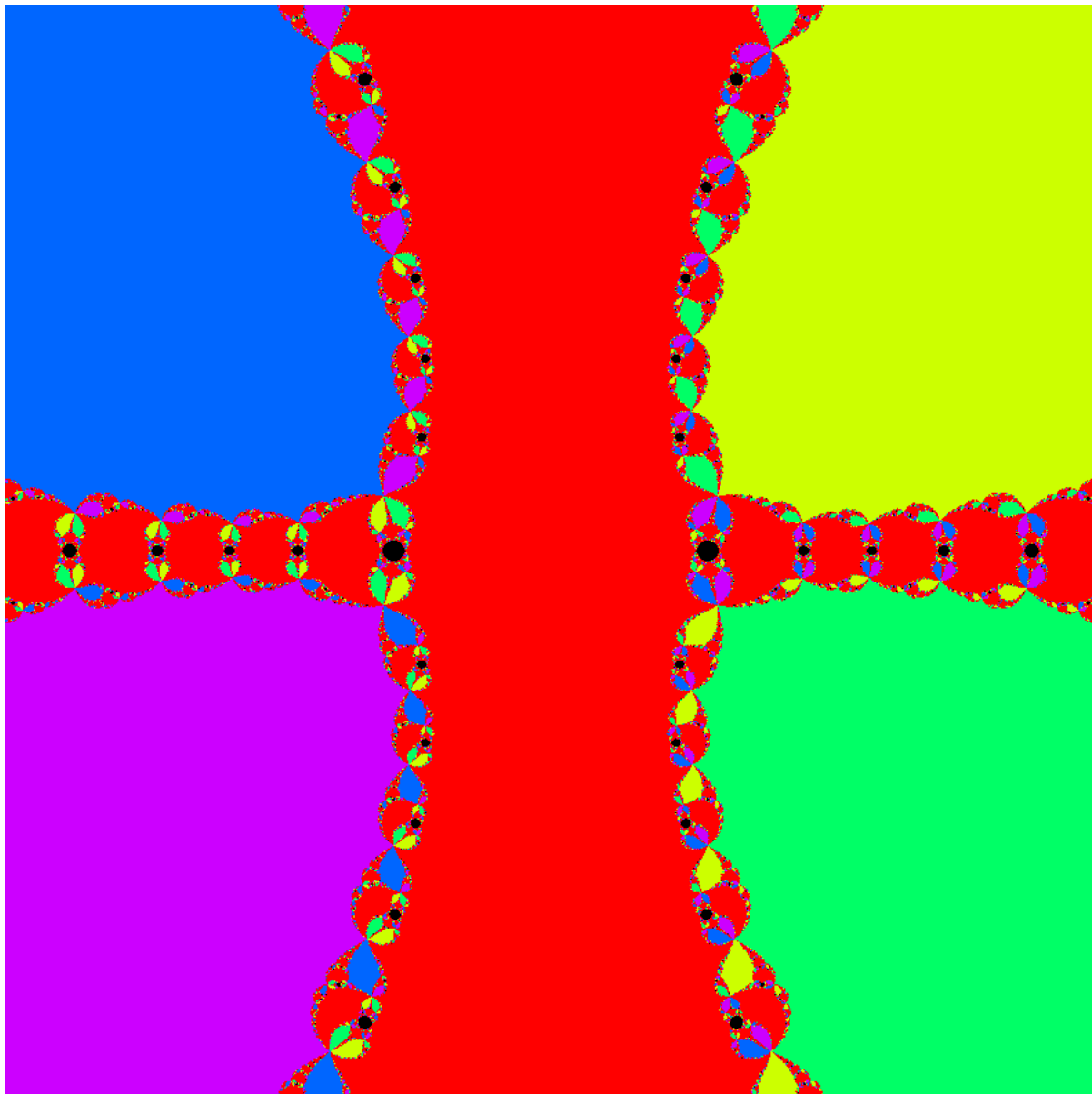


Figure 5: $f(x) = z^5 - 10z^3 + 69z = 0$, fenêtre $[-6,6] \times [-6,6]$. Les zéros sont $(0,0)$ et $(\pm 2, 5794; \pm 1, 2858)$.

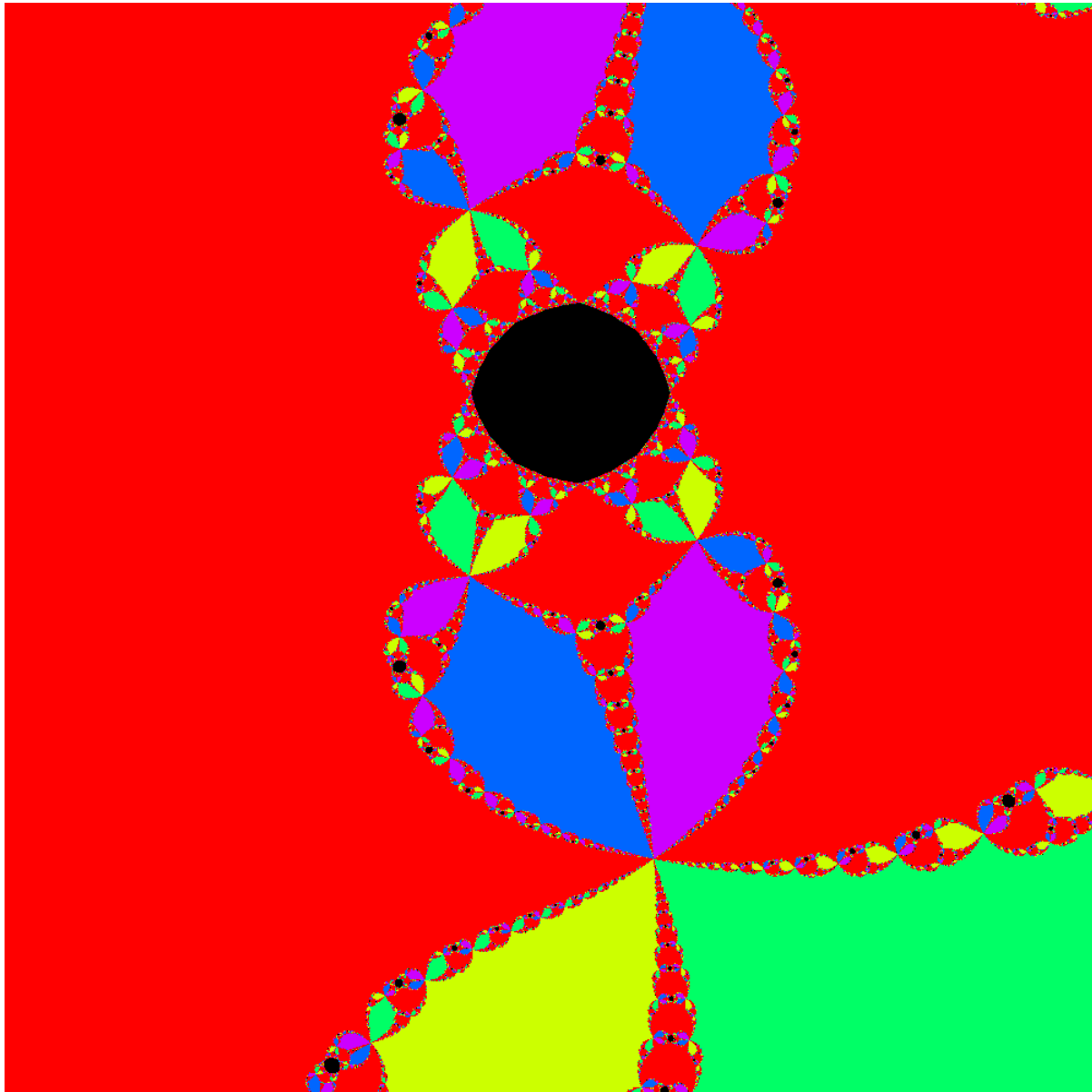


Figure 6: $f(x) = z^5 - 10z^3 + 69z = 0$, fenêtre $[1,2.4] \times [-0.9,0.5]$.

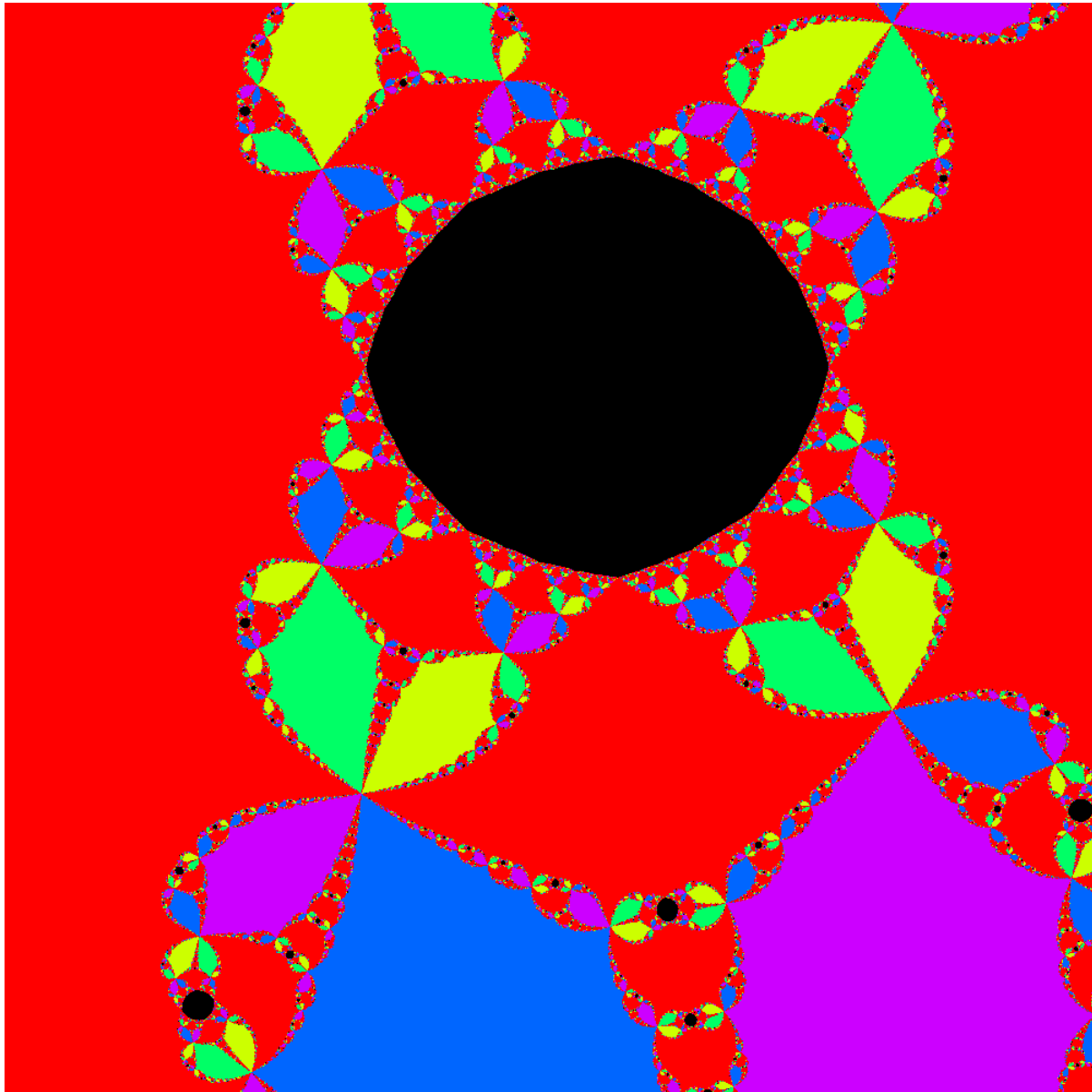


Figure 7: $f(x) = z^5 - 10z^3 + 69z = 0$, fenêtre $[1.4, 2] \times [-0.4, 0.2]$.

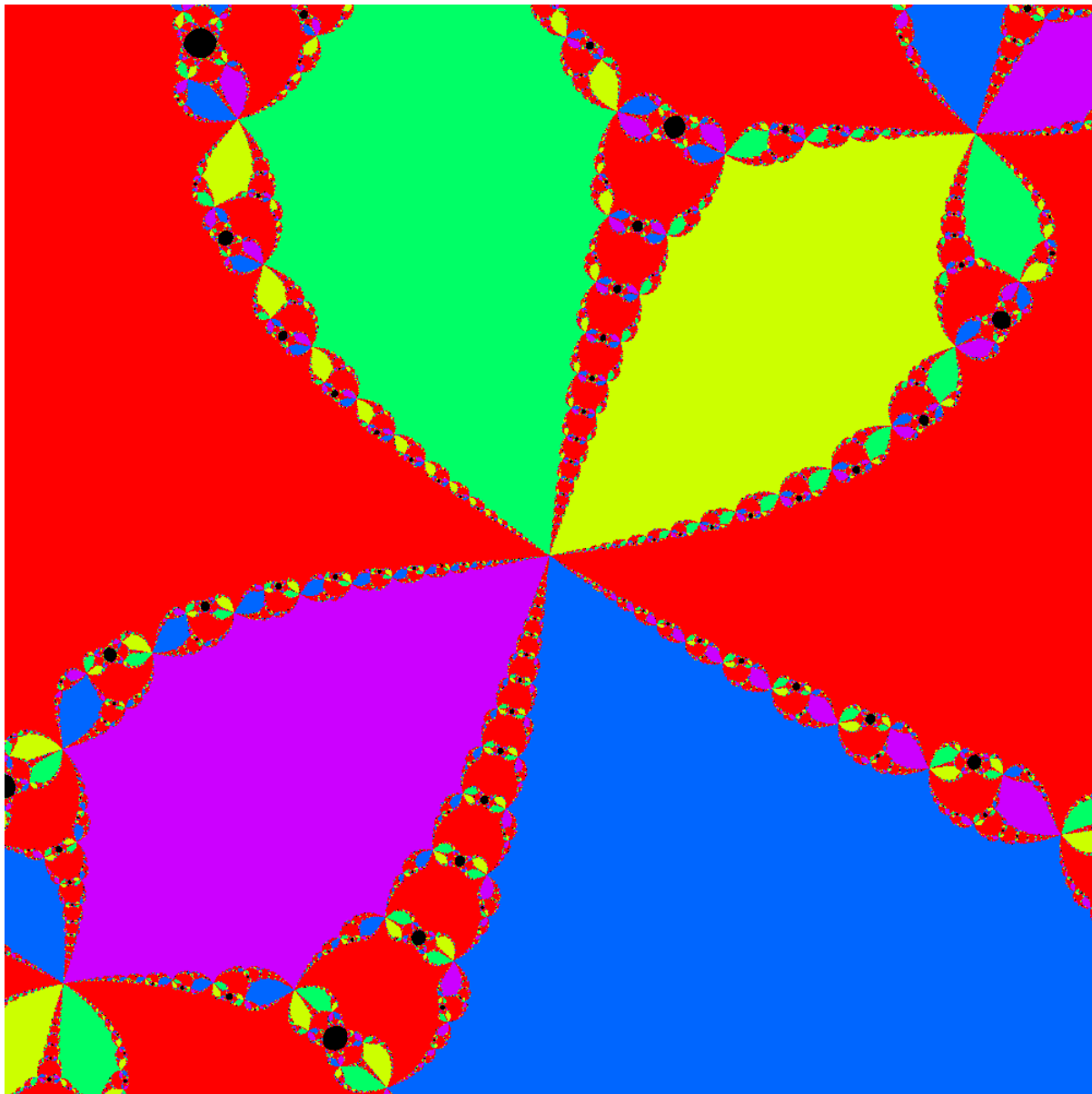


Figure 8: $f(x) = z^5 - 10z^3 + 69z = 0$, fenêtre $[1.4962, 1.6962] \times [-0.3338, -0.1338]$.