C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 91–94, 2001
Théorie des nombres/*Number Theory*

Sommes exponentielles, splines quadratiques et fonction zêta de Riemann

Philippe BLANC

École d'ingénieurs du Canton de Vaud (eivd), CH-1400 Yverdon-les-Bains, Suisse
Courriel : philippe.blanc@eivd.ch

(Reçu le 25 octobre 2000, accepté le 13 novembre 2000)

Résumé. Étant donné des entiers $a < b$ et des fonctions γ et f à valeurs réelles définies sur $[a,b]$, on pose $S = \sum_{k=a}^{b} \gamma(k)\,\mathrm{e}^{2\pi i f(k)}$. Sous certaines conditions sur γ et f on sait qu'il existe des fonctions $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{f}$ définies sur $[\alpha,\beta]$, où $\beta - \alpha < b - a$, telles que $S = \sum_{k=\alpha}^{\beta} \tilde{\gamma}(k)\,\mathrm{e}^{2\pi i \tilde{f}(k)} + R$, où R est petit. Nous montrons que l'approximation de γ et f par des fonctions polynomiales par morceau conduit à une expression de R que la méthode classique, basée sur une approximation de S par une somme d'intégrales, ne permet pas d'obtenir. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Exponential sums, quadratic splines and the Riemann zeta-function

Abstract. *Given integers $a < b$ and real-valued functions γ and f defined on $[a,b]$, we set $S = \sum_{k=a}^{b} \gamma(k)\,\mathrm{e}^{2\pi i f(k)}$. Under some conditions on γ and f we know that there exist functions $\tilde{\gamma}$ and $\tilde{f}$ defined on $[\alpha,\beta]$, where $\beta - \alpha < b - a$, such that $S = \sum_{k=\alpha}^{\beta} \tilde{\gamma}(k)\,\mathrm{e}^{2\pi i \tilde{f}(k)} + R$, where R is small. We show that the approximation of γ and f by piecewise polynomial functions leads to an expression of R that the classical method, based on approximation of S by sum of integrals, cannot produce.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Dans de nombreux problèmes de la théorie des nombres on est amené à transformer une somme exponentielle longue en une somme courte. Une manière classique de réaliser cette transformation consiste à approcher la somme longue par une somme courte d'intégrales trigonométriques et d'estimer chacune de ces intégrales par la méthode de la phase stationnaire. On pourra consulter à ce sujet l'article de van de Corput [2] dont certains résultats sont contenus dans Titchmarsh [5] et celui de Karatsuba [3] repris dans Karatsuba–Voronin [4]. L'objet de cette Note est de présenter une méthode basée sur l'utilisation de splines quadratiques qui, lorsque f'' est petite, fournit la partie principale du terme R défini dans le résumé. En guise d'illustration nous appliquons notre résultat à la fonction zêta de Riemann. On trouvera dans [1] les démonstrations des résultats annoncés dans cette Note.

Note présentée par Enrico BOMBIERI.

S0764-4442(00)01779-1/FLA

Notations. – Pour $a,\ b$ entiers on pose

$$\sum_a^b = 0 \quad \text{si } a > b \quad \text{et} \quad {\sum_a^b}' f(k) = \frac{1}{2} f(a) + \sum_{a+1}^{b-1} f(k) + \frac{1}{2} f(b) \quad \text{si } a < b.$$

Étant donné un nombre réel x on désigne par $[x]$ sa partie entière, par $\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire et on pose $[x]_- = -[-x] - 1$. On introduit les espaces de fonctions polynomiales par morceau définis par

$$V^0[a,b] = \{\psi : [a,b] \to \mathcal{R} \mid \psi|_{]k,k+1]} \text{ est une constante pour tout } k = a, \dots, b-1 \text{ et } \psi(a) = \psi(a_+)\},$$
$$V^2[a,b] = \{g \in \mathrm{C}^1[a,b] \mid g|_{[k,k+1]} \text{ est un polynôme de degré au plus deux pour tout } k = a, \dots, b-1\}$$

et on utilise la notation $A = \mathrm{O}_\alpha(B)$ pour signifier qu'il existe une constante positive $C(\alpha)$ telle que $|A| \leqslant C(\alpha) B$.

2. Résultat principal et application

La formulation des hypothèses du théorème de Karatsuba [3] s'avère pratique et nous l'avons adoptée.

THÉORÈME 1. – *Soient $a < b$ des entiers et soient $\gamma \in \mathrm{C}^2[a,b]$ et $f \in \mathrm{C}^5[a,b]$ des fonctions à valeurs réelles possédant la propriété suivante : il existe une constante $c \geqslant 1$ et des constantes $H > 0$, $U \geqslant b - a$ et $A \geqslant c^{-1}$ telles que $A \leqslant cU$ satisfaisant*

$$c^{-1}A^{-1} \leqslant f''(x) \leqslant cA^{-1}, \quad |f^{(3)}(x)| \leqslant cA^{-1}U^{-1}, \quad |f^{(4)}(x)| \leqslant cA^{-1}U^{-2}, \quad |f^{(5)}(x)| \leqslant cA^{-1}U^{-3},$$
$$|\gamma(x)| \leqslant cH, \quad |\gamma'(x)| \leqslant cHU^{-1}, \quad |\gamma''(x)| \leqslant cHU^{-2}$$

pour tout $x \in [a,b]$.

Soient encore ϕ la fonction définie sur $]0,\infty[\times[0,1]$ par

$$\phi(\lambda,\mu) = \int_0^\infty \frac{\sinh\big(2\pi(\mu - \frac{1}{2})x\big)}{\sinh(\pi x)} \, \mathrm{e}^{i(\pi/2 - \pi\lambda x^2)} \, \mathrm{d}x$$

et $x(\cdot)$ l'unique fonction satisfaisant $f'(x(y)) = y$ pour tout $y \in [f'(a), f'(b)]$. Alors

$${\sum_a^b}' \gamma(k) \, \mathrm{e}^{2\pi i f(k)} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{[f'(a)]+1}^{[f'(b)]} \frac{\gamma(x(k))}{\sqrt{f''(x(k))}} \, \mathrm{e}^{2\pi i (f(x(k)) - kx(k))} + R(b) - R(a) + \mathrm{O}_c(H), \tag{1}$$

où $R(\ell) = \gamma(\ell) \, \mathrm{e}^{2\pi i f(\ell)} \phi\big(f''(\ell), \{f'(\ell)\}\big)$.

Avant de donner quelques éléments de la démonstration de ce théorème nous en donnons une application à la fonction zêta de Riemann.

THÉORÈME 2. – *Soient $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $t \geqslant 2\pi$ et m un entier tel que $\sqrt{t/(2\pi)} \leqslant m \leqslant t$. Alors*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^s} + \mathrm{e}^{-2\pi i \theta(t)} \Big(\frac{t}{2\pi}\Big)^{1/2-\sigma} \sum_{n=1}^q \frac{1}{n^{1-s}} - \frac{1}{m^s} \phi\Big(\frac{t}{2\pi m^2}, \Big\{-\frac{t}{2\pi m}\Big\}\Big) + \mathrm{O}_{\sigma_0}(m^{-\sigma}),$$

où $s = \sigma + it$, $q = [\frac{t}{2\pi m}]_-$ et $\theta(t) = \frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{8}$.

Remarque 1. – Le théorème 2 fournit une version de l'équation fonctionnelle approchée de la fonction zêta dans laquelle le terme classique $\mathrm{O}_{\sigma_0}\big(t^{1/2-\sigma} q^{\sigma-1}\big)$ est explicité.

La première étape de la démonstration du théorème 1 consiste à obtenir une forme explicite de la relation (1) pour des fonctions $\gamma \in V^0[a,b]$ et $f \in V^2[a,b]$. C'est l'objet des lemmes 1 et 2.

LEMME 1. – *Soient n un entier, $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ un polynôme à coefficients réels où $\alpha > 0$, ϕ la fonction définie dans le théorème 1 et soit encore $z(\cdot)$ l'unique fonction satisfaisant $p'(z(y)) = y$ pour tout $y \in \mathcal{R}$. Alors*

$$\frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{2\pi i p(n)} + \mathrm{e}^{2\pi i p(n+1)}\big) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{p''(n+\frac{1}{2})}} \sum_{[p'(n)]+1}^{[p'(n+1)]} \mathrm{e}^{2\pi i (p(z(k)) - kz(k))}$$
$$+ \mathrm{e}^{2\pi i p(n+1)}\,\phi\Big(p''\Big(n+\frac{1}{2}\Big), \{p'(n+1)\}\Big) - \mathrm{e}^{2\pi i p(n)}\,\phi\Big(p''\Big(n+\frac{1}{2}\Big), \{p'(n)\}\Big).$$

Démonstration. – On commence par utiliser la formule de Poisson pour obtenir

$$\frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{2\pi i p(n)} + \mathrm{e}^{2\pi i p(n+1)}\big) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{2\pi i (p(x) - kx)}\,\mathrm{d}x.$$

Pour M suffisamment grand on vérifie alors que

$$\sum_{-M}^{M} \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{2\pi i (p(x)-kx)}\,\mathrm{d}x = \sum_{[p'(n)]+1}^{[p'(n+1)]} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i (p(x)-kx)}\,\mathrm{d}x + A_{n+1}^M - A_n^M, \tag{2}$$

où

$$A_\ell^M = -\sum_{-M}^{[p'(\ell)]} \int_\ell^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i (p(x)-kx)}\,\mathrm{d}x + \sum_{[p'(\ell)]+1}^{M} \int_{-\infty}^{\ell} \mathrm{e}^{2\pi i (p(x)-kx)}\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

En posant $x = \ell + z$ et $k = [p'(\ell)] + 1 - m$ dans le premier terme du membre de droite de (3) et $x = \ell - z$ et $k = [p'(\ell)] + m$ dans le second, il vient

$$A_\ell^M = \mathrm{e}^{2\pi i p(\ell)} \sum_{m=1}^{M+[p'(\ell)]+1} u_m - \mathrm{e}^{2\pi i p(\ell)} \sum_{M-[p'(\ell)]+1}^{M+[p'(\ell)]+1} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i (\alpha z^2 + (-\{p'(\ell)\}+m)z)}\,\mathrm{d}z,$$

où $u_m = \int_0^\infty \big(\mathrm{e}^{2\pi i(\alpha z^2 + (-\{p'(\ell)\}+m)z)} - \mathrm{e}^{2\pi i (\alpha z^2 + (\{p'(\ell)\}+m-1)z)}\big)\,\mathrm{d}z$. On fait alors usage de l'identité

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{i(az^2+bz)}\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-bz + i(\pi/2 - az^2)}\,\mathrm{d}z$$

valable pour $a > 0$ et $b \geqslant 0$ afin de vérifier que A_ℓ^M tend vers $\mathrm{e}^{2\pi i p(\ell)}\phi\big(p''\big(\ell+\frac{1}{2}\big), \{p'(\ell)\}\big)$ lorsque M tend vers l'infini. On achève la démonstration en explicitant la somme du membre de droite de (2). □

LEMME 2. – *Soient $\psi \in V^0[a,b]$, $g \in V^2[a,b]$ telle que $g''\big(k+\frac{1}{2}\big) > 0$ pour tout $k = a, \dots, b-1$ et $z(\cdot)$ l'unique fonction telle que $g'(z(y)) = y$ pour tout $y \in [g'(a), g'(b)]$. Alors*

$$\frac{1}{2}\sum_a^{b-1} \psi\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\big(\mathrm{e}^{2\pi i g(k)} + \mathrm{e}^{2\pi i g(k+1)}\big) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{[g'(a)]+1}^{[g'(b)]} \frac{\psi(z(k))}{\sqrt{g''_-(z(k))}} \mathrm{e}^{2\pi i (g(z(k)) - kz(k))} + R, \tag{4}$$

où g''_- est la fonction définie par $g''_-(x) = \lim_{y \to x_-} g''(y)$, $R = R_-(b) - R_+(a) + \sum_{i=1}^{3} R_i$ où

$$R_\pm(\ell) = \psi\Big(\ell \pm \frac{1}{2}\Big) \mathrm{e}^{2\pi i g(\ell)} \phi\Big(g''\Big(\ell \pm \frac{1}{2}\Big), \{g'(\ell)\}\Big),$$

$$R_1 = -\sum_{a+1}^{b-1} \Big(\psi\Big(k+\frac{1}{2}\Big) - \psi\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\Big) \mathrm{e}^{2\pi i g(k)} \phi\Big(g''\Big(k-\frac{1}{2}\Big), \{g'(k)\}\Big),$$

$$R_2 = -\sum_{a+1}^{b-1} \psi\Big(k+\frac{1}{2}\Big) \mathrm{e}^{2\pi i g(k)} \partial_\lambda \phi\Big(g''\Big(k-\frac{1}{2}\Big), \{g'(k)\}\Big)\Big(g''\Big(k+\frac{1}{2}\Big) - g''\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\Big),$$

$$R_3 = -\sum_{a+1}^{b-1} \psi\Big(k+\frac{1}{2}\Big) \mathrm{e}^{2\pi i g(k)} B_k \Big(g''\Big(k+\frac{1}{2}\Big) - g''\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\Big)^2,$$

$$B_k = \int_0^1 \partial^2_{\lambda\lambda} \phi\Big(g''\Big(k-\frac{1}{2}\Big) + t\Big(g''\Big(k+\frac{1}{2}\Big) - g''\Big(k-\frac{1}{2}\Big)\Big), \{g'(k)\}\Big)(1-t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour pouvoir appliquer le lemme 2 nous construisons un interpolant $g \in V^2[a,b]$ de f dont les dérivées discrètes d'ordre 3 et 4 satisfont des propriétés analogues aux dérivées de f.

LEMME 3. – *Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème 1 et soit $g \in V^2[a,b]$ l'unique fonction satisfaisant $g(k) = f(k)$ pour $k = a, \ldots, b$ et $g'(a) = f'(a) - \frac{1}{12} f'''(a)$. Alors*

$$g'(k) = f'(k) - \frac{1}{12} f'''(k) + r_{1,k}, \qquad g''\Big(k+\frac{1}{2}\Big) = f''\Big(k+\frac{1}{2}\Big) + r_{2,k},$$

$$g''\Big(k+\frac{1}{2}\Big) - g''\Big(k-\frac{1}{2}\Big) = f'''(k) + r_{3,k},$$

$$g''\Big(k+\frac{3}{2}\Big) - 2g''\Big(k+\frac{1}{2}\Big) + g''\Big(k-\frac{1}{2}\Big) = r_{4,k},$$

où $|r_{i,k}| \leqslant C_i c A^{-1} U^{-2}$ avec $C_1 = 1/10$, $C_2 = 1/2$, $C_3 = 2$ et $C_4 = 5$. De plus, si $U \geqslant c$, alors

$$(2c)^{-1} A^{-1} \leqslant g''\Big(k+\frac{1}{2}\Big) \leqslant 2cA^{-1}, \quad k = a, \ldots, b-1. \tag{5}$$

Remarque 2. – Le terme $\frac{1}{12} f'''(a)$ qui apparaît dans le choix de $g'(a)$ assure la stabilité des dérivées discrètes du spline.

Notons que si $U < c$ alors $b - a < c$, $c^{-1} \leqslant A < c^2$ et le théorème 1 est trivial. On suppose donc $U \geqslant c$ de sorte que la relation (5) a lieu et on applique le lemme 2 avec la fonction $\psi \in V^0[a,b]$ définie par $\psi(k+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\gamma(k) + \gamma(k+1))$ pour $k = a, \ldots, b-1$ et la fonction g définie dans le lemme 3. On achève la démonstration du théorème 1 en vérifiant que les membres de gauche des relations (1) et (4) ainsi que les membres de droite de ces mêmes relations diffèrent par un $\mathrm{O}_c(H)$.

Remerciements. Je tiens à remercier le Professeur Jean Descloux de l'École polytechnique fédérale de Lausanne pour la relecture de cette Note et ses conseils avisés.

Références bibliographiques

[1] Blanc P., On the rôle of the quadratic splines in the study of some exponential sums, Rapport du département de mathématiques de l'EPFL, Lausanne, 2001.
[2] van der Corput J.G., Zahlentheoretische Abschätzungen, M.A. 84 (1921) 53–79.
[3] Karatsuba A.A., Approximation of exponential sums by shorter ones, Proc. Indian Acad. Sci. 97 (1987) 167–178.
[4] Karatsuba A.A., Voronin S.M., The Riemann Zeta-Function, De Gruyter Expositions in Mathematics 5, 1992.
[5] Titchmarsh E.C., The Theory of the Riemann Zeta-Function, The Clarendon Press, 1986.