heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

ALGEBRE

Lang Fred[1]

$$\sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = 6 + 3 + (-2)$$

[1]Version 2012, informatique de gestion

Table des matières

1 Les nombres

1.1 Les ensembles de nombres

Un ensemble est identifié par ses éléments. On note un ensemble de la manière suivante:

$$E = \{4, 8, 13, 2\}$$

Cet ensemble est défini par énumération; tous les éléments sont cités; l'ordre des éléments n'est pas pris en considération.
On peut aussi définir un ensemble par une propriété commune à tous ses éléments. Par exemple, l'ensemble des nombres pairs:

$$A = \{x | x \text{ est un nombre pair }\}$$

où | se lit "tel que".
On indique que 4 appartient à l'ensemble A par

$$4 \in A$$

et que 3 n'appartient pas à cet ensemble par

$$3 \notin A$$

On distingue les ensembles de nombres suivant:

- **Naturels** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$,
- **Entiers** $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...\}$,
- **Rationnels**, $\mathbb{Q} = \{a/b\ | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$,
- **Réels** $\mathbb{R}$
- **Complexes** $\mathbb{C}$.

1.2 La valeur absolue

A chaque nombre z, on associe sa **valeur absolue**, notée $|z|$.
Elle est définie ainsi:

$$|z| = \begin{cases} z & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \\ -z & \text{si } z < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Par exemple ,

$$|3| = +3,\ |0| = 0,\ |-3| = --3 = +3$$

La valeur absolue d'un nombre est toujours positive ou nulle.

Attention aux illusions:

$-$ **x est positif** si x est négatif!

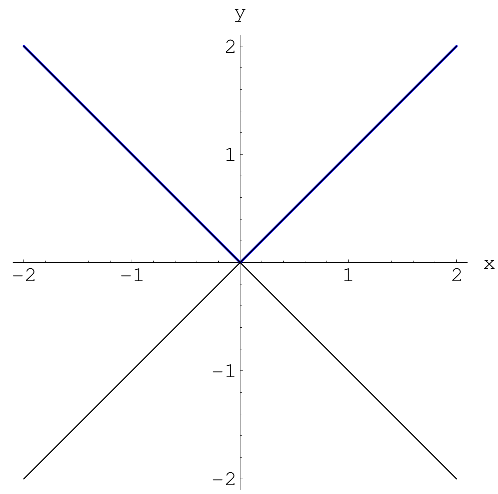

Figure 1: Fonctions valeur absolue $y = |x|$, ainsi que $y = \pm x$

Ainsi, $|x|$ est la partie positive de x.(Voir figure 1)

Propriétés de la valeur absolue:

$$|n+m| \leq |n| + |m| \tag{2}$$
$$||n| - |m|| \leq |n-m| \tag{3}$$
$$|nm| = |n||m| \tag{4}$$
$$|n/m| = |n|/|m| \tag{5}$$

Deux nombres dont la somme est nulle sont dits **opposés**.

Par exemple, $+5$ et -5 sont opposés.

$$\boldsymbol{|x-y| = \textbf{distance de } x \textbf{ à } y} \tag{6}$$

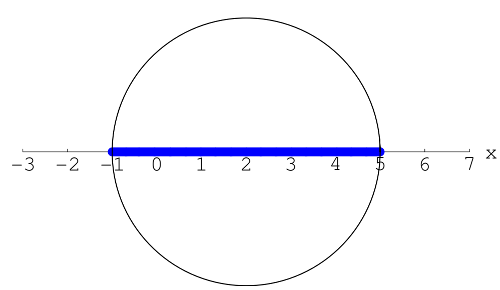

Figure 2: Ensemble des x vérifiant $|x-2| \leq 3$

La valeur absolue permet d'exprimer la distance entre deux points x et y de l'axe réel.

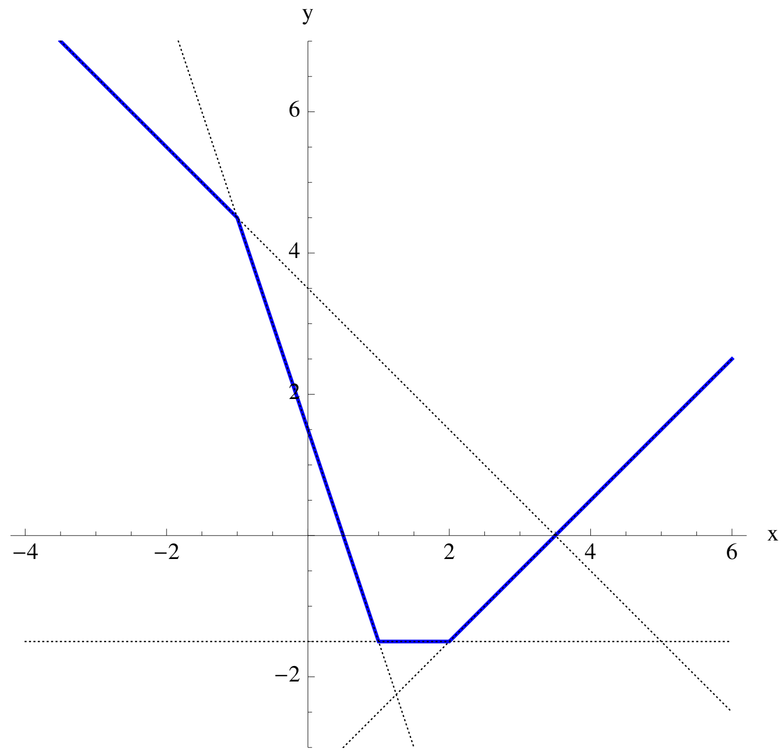

Figure 3: Fonction $y = f(x) = 0.5|x-2| + 1.5|x-1| - |x+1|$ et $-x+3.5, -3x+1.5, -1.5, x-3.5$

On peut aussi l'utiliser pour décrire un intervalle:

$$\boldsymbol{x \in [c-r\,;\, c+r] \Leftrightarrow |c-x| \leq r \Leftrightarrow} x \textbf{ est dans l'intervalle centré en } c \textbf{ de rayon } r \tag{7}$$

Les ingénieurs notent souvent

$$\boldsymbol{x = c \pm r}$$

pour indiquer que la mesure de x est c avec une précision r (Voir figure 2).

A l'aide de la fonction $|x|$, on peut en construire de plus compliquées. (Voir figure 3)

Analyse de la figure (3) :
Les valeurs $x = -1$, $x = 1$ et $x = 2$ donnent les changements de signe des valeurs absolues.
Il y a donc quatre cas à étudier, qui donnent chacun l'équation d'un segment de droite ou d'une demi-droite.

1. $x \leq -1$
$$f(x) = -0.5(x-2) - 1.5(x-1) - -(x+1) = -x + 3.5$$
2. $-1 < x \leq 1$
$$f(x) = -0.5(x-2) - 1.5(x-1) - (x+1) = -3x + 1.5$$
3. $1 < x \leq 2$
$$f(x) = -0.5(x-2) + 1.5(x-1) - (x+1) = -1.5$$
4. $2 < x$
$$f(x) = +0.5(x-2) + 1.5(x-1) - (x+1) = x - 3.5$$

1.3 Le zéro et la division

L'équation $x \cdot b = a$ admet en général la solution $x = a/b$.

Que se passe-t-il si a ou b sont nuls?

- Si $a = 0, b \neq 0$, alors la seule solution est $x = 0/b = 0$. "rien/qqchose = rien".
- Si $a = 0, b = 0$, alors tout nombre x est solution. " rien/rien = indéterminé".
- Si $a \neq 0, b = 0$, alors aucun nombre x n'est solution. " qqchose /rien = impossible".

En résumé, pour $a \neq 0$

$\frac{0}{0}$ est indéterminé et $\frac{a}{0}$ est impossible.

1.4 Développement décimal

Les nombres rationnels peuvent être représentés par un développement décimal.
Un développement décimal illimité définit un nombre réel. [2]

Exemple:

$$4238,75 = 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 7 \cdot 1/10 + 5 \cdot 1/100$$

ou bien

$$4238,75 = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

Dans le principe de la numération de position, les puissances de la base 10 sont omises; le poids d'un chiffre est fonction de sa position.
Les chiffres qui représentent la partie fractionnaire d'un nombre rationnel forment une suite limitée ou illimitée.

Exemples:

$$1/4 = 0,25; \quad 1/3 = 0,33333333...; \quad 1/7 = 0,142857142857142857...$$

Remarquons que le développement n'est pas unique:

$$1/4 = 0,24999999999... = 0,2500000...$$

1/7 est un nombre réel périodique, les chiffres de son développement reviennent au bout de 6 fois.

Le résultat suivant est valable pour tout nombre réel r:

$$\boldsymbol{r} \textbf{ est réel périodique} \Longleftrightarrow \boldsymbol{r} \textbf{ rationnel}$$

[2] Cette définition, plutôt vague, suffira à nos besoins.

Un exemple numérique donnera l'idée de la preuve:

Preuve $\Rightarrow$
Soit le nombre périodique

$$n = 789,4321456456456456...$$

La partie non périodique $789,4321$ admet un nombre $c = 4$ de chiffres après la virgule.
La partie périodique 456 admet un nombre $d = 3$ de chiffres.
Multiplions n par 10^c et par 10^{c+d}:

$$10^4 n = 7894321,456456456456...$$

$$10^7 n = 7894321456,456456456...$$

Soustrayons ces deux nombres:

$$10^7 n - 10^4 n = 7894321456 - 7894321 \Rightarrow n = \frac{7894321456 - 7894321}{10^7 - 10^4}$$

qui est une fraction rationelle.

Preuve $\Leftarrow$
Soit la fraction $789/13 = 60.692307692307692307692307...$
En divisant 789 par 13, il vient le nombre 60 représentant la partie entière du quotient, puis les chiffres 6, 9, 2, 3, 0, 7 qui sont les restes de la division par 13 de nombres pris dans l'ensemble $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120\}$.
Il est clair qu'il peut y avoir au plus $13 - 1 = 12$ chiffres différents, on va donc retrouver les mêmes au bout d'au plus 12 étapes.[3]
Ainsi le résultat est périodique.
De plus, la longueur de la période est inférieur au dénominateur.

Remarque:
Les calculatrices et les ordinateurs travaillent avec des nombres binaires finis, arrondis à $3, 12, 15$ ou 19 décimales, donc dans un sous-ensemble strict de $\mathbb{Q}$.
Les logiciels de calcul symbolique permettent de calculer avec une précision théoriquement illimitée.[4]

1.5 Exemples de nombres

Les nombres rationnels ne permettent pas de représenter tous les points d'un axe.
On sait, depuis Pythagore ($-585 \rightarrow -500$) que la diagonale du carré n'a pas de mesure commune rationnelle avec le côté du carré; $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
Les nombres irrationnels ont une représentation décimale qui n'est pas périodique, bien qu'elle soit illimitée.

$\sqrt{2}$ n'est pas une fraction

Preuve (Euclide)
Supposons que $\sqrt{2}$ soit une fraction, $\sqrt{2} = p/q$.
On peut simplifier la fraction et supposer que p et q sont des entiers sans facteurs communs.
Alors $p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ pair $\Rightarrow p$ pair $\Rightarrow p = 2n$, n entier.

[3] Ici 6 étapes suffisent. Plus généralement, le nombre d'étapes est un diviseur du dénominateur moins un.
[4] La mémoire de l'ordinateur sera une limite.

Donc $4n^2 = 2q^2 \Rightarrow 2n^2 = q^2 \Rightarrow q$ pair. Ainsi la fraction est simplifiable par 2, ce qui contredit l'hypothèse.
C'est un exemple de preuve par l'absurde.

Elle se généralise aisément à toutes les racines n^{emes} de nombres premiers.

Remarquons que $\sqrt{2}$ est solution de l'équation à coefficients entiers $x^2 - 2 = 0$.

Y a-t-il des nombres réels qui ne sont pas solutions de telles équations?

Appelons $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres, appelés **algébriques**, qui sont solutions d'équations à coefficients entiers.
Il contient toutes les fractions, car la fraction p/q, est solution de l'équation $qx - p = 0$.
On a les inclusions:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Est-ce-que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est dans $\mathbb{A}$?

Posons $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
Alors $x^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}$, donc $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ et $(x^2 - 5)^2 = 24$.
Ainsi $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est solution de l'équation $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
Il est donc dans $\mathbb{A}$.

Tout nombre de $\mathbb{A}$ est-il une combinaison de racines diverses, du type $\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[4]{3}$?
Non!, on peut démontrer qu'il existe une infinité de nombres dans $\mathbb{A}$ qui ne sont pas exprimables à l'aide de racines et des quatre opérations + - x /.

Par exemple, l'équation $x^5 - 6x + 3 = 0$ admet une solution qui ne peut pas s'exprimer par des racines, pourtant ce nombre est dans $\mathbb{A}$.
$\mathbb{A}$ est donc plus grand que les nombres qui s'expriment avec des racines.

Y a-t-il alors des nombres réels qui ne soient pas dans $\mathbb{A}$?
Oui! Ce sont les nombres **transcendants**. Les premiers ont été découverts par Liouville en 1844.
En 1873, Hermite prouve que le nombre e est transcendant, et, en 1882, Lindemann prouve que π l'est.
Des nombres comme $log(2)$ ou $sin(1)$ sont aussi transcendants.

En fait, il y a tellement de nombres transcendants et tellement peu de nombres algèbriques, qu'en piquant un nombre au hasard, ou en prenant un point d'un axe, il n'y a aucune chance de tomber sur un nombre algèbrique (ou rationnel).

L'introduction des nombres **complexes** $\mathbb{C}$ permet de donner des solutions à des équations telles que $x^2 + 1 = 0$ et à toutes les équations algèbriques.

Une équation de degré n possède toujours n solutions, certaines d'entre elles pouvant être confondues, réelles ou complexes.

Ce théorème a été démontré par Gauss au début du 19^{eme} siècle.

2 Opérations algèbriques. Polynômes

2.1 Puissances et racines

Les propriétés sont valables pour autant que chaque membre soit défini

Règles de base:

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{8}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{9}$$

$$(ab)^m = a^m b^m \tag{10}$$

Conventions:

$$a^0 = 1 \tag{11}$$

$$a^{-n} = 1/a^n \tag{12}$$

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} \tag{13}$$

Règles dérivées:

$$a^m/a^n = a^{m-n} \tag{14}$$

$$(a/b)^n = a^n/b^n \tag{15}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \tag{16}$$

$$\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b} \tag{17}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \tag{18}$$

$$\sqrt[nm]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \tag{19}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{20}$$

Non-règles:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \tag{21}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b \tag{22}$$

$$(a+b)^2 \neq a^2+b^2 \tag{23}$$

2.2 Définition de la racine carrée

a étant un nombre positif ou nul,

$\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre réel positif dont le carré vaut a.

La racine carrée d'un nombre négatif n'est pas un nombre réel.

Si m pair, il en est de même de $\sqrt[m]{a}$.

Ainsi on écrira:

$$\sqrt{4} = 2$$

mais

$$\sqrt{4} \neq \pm 2$$

On vérifiera sans peine les deux formules

$$(\sqrt{x})^2 = x \tag{24}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \tag{25}$$

Conséquence:

$$\sqrt{x^2 \cdot z} = |x| \cdot \sqrt{z} \neq x \cdot \sqrt{z} \tag{26}$$

$$\sqrt{(-3)^2 \cdot 5} = |-3|\sqrt{5} \neq -3\sqrt{5}$$

Autrement dit:

- $x \geq 0$: $x \cdot \sqrt{z} = +\sqrt{x^2 \cdot z}$
- $x < 0$: $x \cdot \sqrt{z} = -\sqrt{x^2 \cdot z}$

Astuce:

"**Pour entrer dans une racine, il faut laisser son signe dehors**".

2.3 Exposants fractionnaires ou réels

En principe, si l'exposant n'est pas entier, la base est positive. Sinon on peut aboutir à certaines contradictions:

Exemple:

$$\sqrt{-4} = (-4)^{1/2} = (-4)^{2/4} = \left((-4)^2\right)^{1/4} = 16^{1/4} = 2$$

mais $\sqrt{-4}$ n'est pas un nombre réel et le carré de 2 ne donne pas -4.

Exemple:
Simplification d'une expression contenant des puissances et des racines:

$$\sqrt{\sqrt[3]{a}\sqrt{b}\sqrt[3]{a^2}}\ \sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{a}} = \left(a^{1/3}b^{1/2}a^{2/3}\right)^{1/2}\ \left(a^{1/2}b^{1/3}a^{1/3}\right)^{1/3} =$$

$$\left(ab^{1/2}\right)^{1/2}\ \left(a^{5/6}b^{1/3}\right)^{1/3} = a^{1/2}b^{1/4}a^{5/18}b^{1/9} = a^{7/9}b^{13/36}$$

2.4 Monômes

On appelle **monôme** un produit de plusieurs facteurs numériques et littéraux.

Exemple:

$$4a^3b^2c$$

Le monôme est formé de deux parties:

- un nombre appelé **coefficient** (ici 4)
- une partie **littérale** (ici a^3b^2c)

Le **degré** d'un monôme par rapport à l'une des grandeurs (lettres) est l'exposant de cette grandeur.

Exemple:

Le degré de a^3 est 3.

Le **degré total** d'un monôme est la **somme des degrés** par rapport à chacune de ses lettres.

Exemple:

$4a^3b^2c$ est de degré total 6.

L'addition ou la soustraction de deux monômes ayant même partie littérale ne donne qu'un seul monôme.

2.5 Polynômes

On appelle **polynôme** la **somme** de plusieurs monômes.

Le **degré** d'un polynôme par rapport à une variable est le degré du monôme de plus haut degré par rapport à celle-ci.
Les polynômes peuvent être ordonnés par puissances croissantes ou décroissantes d'une variable.

Exemples:

- $P(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^2 + x + 7$
- $Q(x, y) = yx^5 + (y^2 + 1)x^4 + x^3 + (y^2 + y + 1)x^2 + x + 7y^5$

Ces polynômes sont ordonnés selon les puissances décroissantes de x.

Un polynôme est **homogène** par rapport aux lettres x, y, z par exemple, lorsque tous les monômes sont de même degré relativement à ces lettres; le terme constant est donc manquant.

Exemple:

$$7xy^2 + x^3 - 4y^3$$

est homogène en x et y.

Un polynôme est homogène si, en donnant une même unité aux différentes lettres, l'addition à un sens physique.

Exemple:

$$\text{Si } x, y \text{ sont en mètres , } 7xy^2 + x^3 - 4y^3 \text{ donne des mètres cubes.}$$

Un polynôme $P(x)$ peut être vu comme une fonction de x, $P(x)$ se lit "P de x".

Si l'on substitue une valeur α (numérique ou littérale) à x, $P(x)$ devient $P(\alpha)$.

$P(\alpha)$ est la valeur, ou l'**évaluation** du polynôme pour $x = \alpha$.

2.6 Produit de deux polynômes

Pour multiplier deux polynômes, on multiplie chaque terme du premier polynôme par chaque terme du second et on fait la somme de tous les produits partiels obtenus.

Exemple:
$(3x^3 - 5x^2 + 7x - 4)(2x^2 - x + 3) =$
$(6x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 8x^2) + (-3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 4x) + (9x^3 - 15x^2 + 21x - 12) =$
$6x^5 - 13x^4 + 28x^3 - 30x^2 + 25x - 12.$

On remarque que le **degré du polynôme produit est égal à la somme des degrés des facteurs**.
Lorsque les polynômes sont homogènes, leur produit reste homogène.

2.7 Produits remarquables

Les formules suivantes sont vraies pour toutes les valeurs de a et de b; ce sont des **identités**.
Il est important de les connaître par coeur, dans les deux sens.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \tag{27}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \tag{28}$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \tag{29}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \tag{30}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \tag{31}$$

2.8 Simplification d'une racine

On peut simplifier une racine carrée (cubique) en extrayant un facteur carré (cubique).

Exemples:

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2 \cdot \sqrt{6}$$

$$\sqrt{a^4b^3c} = a^2|b| \cdot \sqrt{bc}$$

$$\sqrt[3]{d^6e^3f} = d^2e \cdot \sqrt[3]{f}$$

2.9 Rendre rationnel un dénominateur ou un numérateur

Il est possible de transformer une fraction pour qu'elle n'aie plus de racines au dénominateur ou au numérateur.
Pour cela on utilise la formule

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b \tag{32}$$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sont dits **conjugués**.

Exemples:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2-\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\sqrt{2} &= \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\
\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}
\end{aligned}$$

3 Le premier degré

3.1 Pente. Fonction. Graphe

Dans un système d'axes perpendiculaires Oxy , la **pente** d'une droite ou d'un segment AB, $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ est définie par le quotient

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{33}$$

Δx et Δy pouvant être positifs ou négatifs.

- Si $\Delta y = 0$, la droite est horizontale, sa pente est nulle.
- Si $\Delta x = 0$, la droite est verticale, sa pente est infinie.

L'angle θ entre l'axe Ox et la droite AB est donné par:

$$m = \tan(\theta) \tag{34}$$

Remarque:
Si les unités ne sont pas les mêmes sur chaque axe, une droite de pente 1 donnera $\theta = 45^0$, mais la mesure au rapporteur donnera autre chose!

Une fonction du premier degré $f(x) = mx + h$ admet pour graphe une droite non verticale $y = mx + h$ de pente m et d'ordonnée à l'origine h.

Elle passe par les points $(-h/m; 0)$ et $(0; h)$.

Le tableau suivant donne les quadrants traversés par la droite en fonction de m et h:

	$h > 0$	$h = 0$	$h < 0$
$m > 0$	$III - II - I$	III-I	$III - IV - I$
$m = 0$	$II - I$	Ox	$III - IV$
$m < 0$	$II - I - IV$	$II - IV$	$II - III - IV$

Deux grandeurs **directement proportionnelles** y et x sont liées par une relation

$$\boldsymbol{\frac{y}{x} = m = constant}$$

ainsi l'équation d'une droite $y = mx$ représente deux grandeurs directement proportionnelles, la pente m donnant le rapport de proportionnalité.

Deux grandeurs **inversément proportionnelles**

$$\boldsymbol{y\,x = m = constant}$$

sont représentées par le graphe $y = \dfrac{m}{x}$ d'une hyperbole.

3.2 Inéquations du premier degré

D'une manière générale, résoudre une inéquation

$$\boldsymbol{f(x) \leq 0}$$

revient à trouver les valeurs de x pour lesquels $y = f(x)$ est négatif.

Ici, il faut donc trouver les abscisses x des points de la droite situés sous l'axe Ox.

Avant de résoudre une inéquation du premier degré, il y a lieu d'examiner les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'inéquation est définie: **conditions d'existence**, ensuite il faut regrouper les termes en x dans un membre, mettre x en évidence et diviser par le facteur de x.

Principes d'équivalence:

- On peut ajouter ou soustraire une même quantité (littérale ou numérique) de chaque membre d'une inéquation
- On peut multiplier ou diviser par une même quantité non nulle (littérale ou numérique) chaque membre d'une inéquation.
- Si la quantité est négative, il faut **changer le sens** de l'inéquation.

- Si la quantité est littérale, il peut être nécessaire de distinguer les cas selon qu'elle est négative, nulle ou positive.

Il n'est généralement pas permis de multiplier (ou de diviser) par une expression renfermant l'inconnue, car on introduit en général des solutions supplémentaires.

Exemple

$$5x + 4 \geq 2x + 6 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow x \geq 2/3$$

Exemple

$$a^2x - a \leq 1 - x \Rightarrow a^2x + x \leq 1 + a \Rightarrow (a^2+1)x \leq 1 + a \Rightarrow^{5} \; x \leq \frac{1+a}{a^2+1}$$

3.3 Systèmes d'inéquations

Si plusieurs inéquations de même inconnue doivent être satisfaites simultanément (système d'inéquations), on résoudra chaque inéquation et on ne retiendra que les solutions valables pour toutes les inéquations.

Exemple

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 3x-1 & \leq & x+2 \\ 1-x & \leq & 2x+5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 2x & \leq & 3 \\ -4 & \leq & 3x \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & \leq & 3/2 \\ x & \geq & -4/3 \end{array} \right\}$$

Donc finalement,

$$-4/3 \leq x \leq 3/2$$

3.4 Equations réductibles au premier degré

3.4.1 Equation contenant l'inconnue au dénominateur

Si on multiplie ou si l'on divise une équation $A(x) = B(x)$ par C(x), la nouvelle équation n'est pas équivalente à la première, toutes les solutions de $C(x) = 0$ sont des solutions parasites.

Exemple:

$$\frac{3}{x-3} + \frac{5}{x-5} = \frac{34}{x^2 - 8x + 15}$$

Les conditions d'existence sont donc $x \neq 3$ et $x \neq 5$, car pour $x = 3$ et $x = 5$, l'équation n'est pas définie.

Remarquons que $(x-3)(x-5) = x^2 - 8x + 15$; il faut donc multiplier par le plus petit dénominateur commun, c'est-à-dire $(x-3)(x-5)$ et non par le produit $(x-3)(x-5)(x^2-8x+15)$!

[5] la division par $a^2 + 1$ est autorisée car $a^2 + 1$ est toujours positif

Chassons les dénominateurs:

$$3(x-5)+5(x-3)=34 \Rightarrow 8x=64 \Rightarrow x=8$$

cette solution est acceptable, car différente de 3 et 5.

Exemple:

$$\frac{2x}{x^2-4}=\frac{-4}{x^2-4}$$

Les conditions d'existence sont $x \neq 2$ et $x \neq -2$.

Chassons les dénominateurs: $2x=-4 \Rightarrow x=-2$.
Cette solution n'est pas acceptable; l'équation n'a donc pas de solution.

3.4.2 Equations du type $A(x)B(x)C(x)=0$

Les solutions de l'équation $A(x)B(x)C(x) = 0$ sont la réunion des solutions des équations $A(x)=0$, $B(x)=0$ et $C(x)=0$.

Exemple:

$$x^3-9x=0 \Leftrightarrow x(x+3)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0\ ,x=3\ ,x=-3$$

4 Le second degré

4.1 Complétion du carré

Supposons $a \neq 0$, alors

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Nous avons supposé que le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Soient

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et

$$x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

4.2 Factorisation du trinôme

La **factorisation du trinôme** s'écrit alors:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)} \tag{35}$$

4.3 Formule quadratique

La factorisation précédente fournit une formule générale de résolution.
Nous avons obtenu:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac} \tag{37}$$

est le **discriminant** de l'équation quadratique.

Trois cas sont à envisager:

- $\Delta > 0$: x_1 et x_2 sont réelles et distinctes: 2 solutions distinctes
- $\Delta = 0$: $x_1 = x_2$ sont réelles et confondues: 1 solution double
- $\Delta < 0$: x_1 et x_2 sont imaginaires et distinctes: pas de solution

Exemples:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$

  Ici, $a = 1; b = -5; c = 6$ et les solutions sont $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$, donc 2 et 3.

  La factorisation du trinôme donne:

  $$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

- $5x^2 - 2x - 1 = 0$

  Ici, $a = 5; b = -2; c = -1$ et les solutions sont

  $$x = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}$$

  La factorisation du trinôme donne:

  $$5x^2 - 2x - 1 = 5\left(x - \frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)$$

4.4 Formules de Viète

En développant $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ et en identifiant les coefficients, on obtient les **formules de Viète**:

- $$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -b/a} \tag{38}$$

- $$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = +c/a} \tag{39}$$

Ces formules permettent de trouver le signe ou la moyenne des solutions, sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'équation.

Les formules de Viète se généralisent à un polynôme de degré arbitraire.
Examinons le degré 3.

Supposons que le polynôme $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ admette les zéros x_1, x_2, x_3.
Alors

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$
$$a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - a_3x_1x_2x_3$$

En comparant les coefficients des deux membres, on obtient les formules de Viète:

$x_1 + x_2 + x_3 = -a_2/a_3$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = +a_1/a_3$

$x_1x_2x_3 = -a_0/a_3$

4.5 Fonctions. Graphes. Paraboles

Dans un système d'axes Oxy (perpendiculaires), le graphe d'une fonction du second degré

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c \ , \ a \neq 0}$$

est une parabole.

Définition
Une **parabole** est le lieu des points P équidistants d'une droite fixe d et d'un point fixe $F \notin d$.
F est le **foyer** de la parabole et d sa **directrice**.

On note p la distance de F à d, p est le **paramètre** de la parabole.
La droite passant par F et perpendiculaire à d est un axe de symétrie de la courbe, c'est l'**axe** de la parabole.
Il coupe celle-ci en un point S, le **sommet** de la parabole.
La tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe.

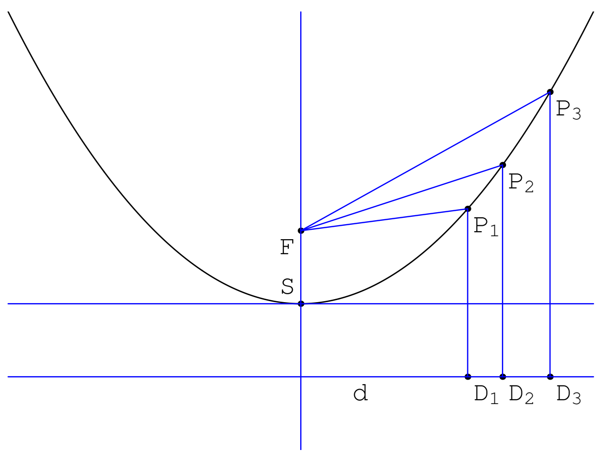

Figure 4: Sommet, foyer, axe et tangente au sommet d'une parabole.

Plaçons l'origine au sommet, l'axe Oy selon l'axe de la parabole et du côté du foyer, et l'axe Ox selon la tangente au sommet.

Alors $S(0;0), F(0;p/2)$ et $d : y = -p/2$.

Soit $P(x;y)$ un point quelconque.

$$\delta(P,d) = PF \Leftrightarrow y + p/2 = \sqrt{x^2 + (y-p/2)^2} \Leftrightarrow x^2 = 2py$$

D'où l'équation de la parabole dirigée vers le haut:

$$y = \frac{1}{2p}\, x^2 \tag{40}$$

Une symétrie d'axe Ox nous donne la parabole dirigée vers le bas:

$$y = -\frac{1}{2p}\, x^2 \tag{41}$$

Une translation des axes nous donne l'équation d'une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$:

$$\boldsymbol{y - \beta = \frac{1}{2p}\, (x - \alpha)^2} \tag{42}$$

Vérifions maintenant que toute fonction du second degré est bien le graphe d'une parabole. Reprenons la complétion du carré (page 18):

$$y = ax^2 + bx + c = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow y + \frac{\Delta}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2$$

Ainsi:

> **La fonction du second degré**
>
> $$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$$
>
> **est le graphe d'une parabole d'axe vertical de sommet $\boldsymbol{S(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})}$ et de paramètre $\boldsymbol{p = \frac{1}{2a}}$.**

Remarque:
L'abscisse du sommet est égale à la moyenne des abscisses des points de la parabole situé sur Ox, résultat qu'on peut obtenir aussi par les règles de Viète: $x_1 + x_2 = -b/a$, donc

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Une permutation des axes Ox et Oy nous donne l'équation

$$y^2 = 2px \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2px}$$

Ainsi les graphes des fonctions "racines de polynômes du premier degré" sont des demi-paraboles d'axe horizontal.

4.6 Equations et inéquations du second degré

Résoudre l'inéquation

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c < 0}$$

(resp. $f(x) > 0$) revient à trouver les abscisses des points de la parabole situés au-dessous (resp. au-dessus) de l'axe Ox. L'inéquation se résout par une étude du signe de la fonction $f(x)$.

Voici les différents cas de figure selon les signes[6] de a et de Δ:

[6] Le cas $a = 0$ n'est pas traité, car la fonction est alors du premier degré.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	$+0-0+$	$-0+0-$
$\Delta = 0$	$+0+$	$-0-$
$\Delta < 0$	$+$	$-$

Le coefficient de x^2 est le coefficient dominant de la fonction:
lorsque x devient très grand (positif ou négatif), c'est lui qui donne le signe de $f(x)$.

Marche-à-suivre pour résoudre l'inéquation du second degré:

- On met l'inéquation sous une des formes standards $ax^2 + bx + c > 0,\ \geq 0,\ < 0,\ \leq 0$
- On calcule les racines éventuelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$
- Selon les signes du coefficient dominant a et du discriminant Δ, on détermine le signe de $f(x)$ et donc les solutions de l'inéquation

Exemple:

$$3x^2 - 8x + 7 > 2x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$$

Le discriminant $\Delta = 1$ est positif, $f(x)$ s'annule pour $x = 2$ et $x = 3$.

$a = 1$ est positif, donc le signe de $f(x)$ est $+0-0+$.

L'ensemble des solutions est:

$$x\ \in\,]-\infty; 2[\, \cup\,]3; \infty[$$

Ou encore:

$$x < 2 \textbf{ ou } x > 3$$

Mais non pas[7]:

$$2 > x > 3$$

D'autre part, attention à ne pas résoudre les inéquations ainsi:

$$x^2 > 4 \Rightarrow x > \pm 2$$

Cette dernière expression n'est pas équivalente à $x^2 > 4$ qui, elle, équivaut à $x < -2$ **ou** $x > 2$.

$x > \pm 2$ équivaut à $x > 2$. Car

$$x > 2 \Rightarrow x > -2$$

Ainsi on a perdu la moitié des solutions!

[7] Les inégalités qui suivent imposent deux contraintes à x: "être inférieur à 2" **et** "être supérieur à 3, aucun x ne vérifient ces deux contraintes simultanément.

4.7 Inéquations se ramenant au second degré

Exemple:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2} > 0$$

On étudie le signe du numérateur et celui du dénominateur, puis on applique la règle des signes:

$$\frac{+}{+} = + \qquad \frac{+}{-} = - \qquad \frac{-}{+} = - \qquad \frac{-}{-} = +$$

x		1		2		3		4	
$x^2 - 7x + 12$	+	+	+	+	+	0	-	0	+
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	∞	-	∞	+	0	-	0	+

Ainsi l'inéquation est vérifiée pour

$$x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } 4 < x$$

ou encore

$$x \in]-\infty; 1[\cup]2; 3[\cup]4; \infty[$$

5 Factorisation et division des polynômes

5.1 Factorisation des polynômes

La décomposition en facteurs (factorisation) est importante en algèbre. Un des problèmes de l'algèbre est la recherche des racines (ou zéros) d'un polynôme, c'est-à-dire des valeurs qui annulent le polynôme.

Exemple:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Une racine est 1, parce que $P(1) = 0$; $P(x)$ s'annule pour $x = 1$.

La détermination des racines de $P(x)$ ne présente plus de difficulté, dès que $P(x)$ est mis sous la forme d'un produit de facteurs de degrés 1 ou 2.
Pour que $P(x)$ soit nul, il faut et il suffit alors que l'un des facteurs soit nul.

Exemple:
Ayant obtenu la décomposition en facteurs:

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$P(x)$ est nul pour $x = 1$, $x = 2$ ou $x = 3$.

Le problème général de la décomposition en facteurs est très difficile.

5.2 Utilisation des identités remarquables

Les identités remarquables sont des exemples de factorisations.
Il s'agit de reconnaître la forme d'une identité et de l'écrire sous forme de produits.

Exemples:

- type $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$:
  - ◇ $25x^2 - 36y^2 = (5x+6y)(5x-6y)$
  - ◇ $x^3y - xy^3 = xy(x^2-y^2) = xy(x+y)(x-y)$
  - ◇ $x^5y - xy^5 = xy(x^4-y^4) = xy(x^2+y^2)(x^2-y^2) = xy(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
  - ◇ $(5a+2c)^2 - (3a-c)^2 = (5a+2c+3a-c)(5a+2c-3a+c) = (8a+c)(2a+3c)$

- type $\boldsymbol{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2}$:
  - ◇ $x^4 + 2x^2y^3 + y^6 = (x^2+y^3)^2$
  - ◇ $y^2 - 2 + 1/y^2 = (y - 1/y)^2$
  - ◇ $a^2/16 - 3ab/2 + 9b^2 = (a/4 - 3b)^2$
  - ◇ $175a^2x^{2m} + 280a^2x^my^n + 112a^2y^{2n} = 7a^2(25x^{2m} + 40x^my^n + 16y^{2n}) = 7a^2(5x^m + 4y^n)^2$

- type $\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)}$:
  - ◇ $a^3 - 64 = (a-4)(a^2+4a+16)$

- type $\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)}$:
  - ◇ $a^3 + 64 = (a+4)(a^2-4a+16)$
  - ◇ $x^{12} + y^{12} = (x^4)^3 + (y^4)^3 = (x^4+y^4)(x^8 - x^4y^4 + y^8)$
  - ◇ $a^6 + 4096 = a^6 + 4^6 = (a^2)^3 + (4^2)^3 = (a^2+16)(a^4 - 16a^2 + 256)$

- type $\boldsymbol{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$:
  - ◇ $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^3$
  - ◇ $250x^6y^9 + 150x^4y^7z^2 + 30x^2y^5z^4 + 2y^3z^6 = 2y^3(125x^6y^6 + 75x^4y^4z^2 + 15x^2y^2z^4 + z^6) = 2y^3(5x^2y^2 + z^2)^3$

5.3 La division euclidienne

Il y a **deux sortes de division** des nombres, la division réelle et la division euclidienne:

$$7/2 = 3,5$$

est la division réelle

$$7 : 2 = 3 + \frac{1}{2}$$

est la division euclidienne
La division réelle demande deux entrées, le numérateur et le dénominateur, elle fournit une sortie, le quotient.
La division euclidienne demande les mêmes entrées, mais fournit deux sorties, le quotient et le reste.

Remarque:
Dans l'exemple ci-dessus, le reste n'est pas 1/2 mais 1.

La division des polynômes correspond à la division euclidienne.

Exemple:

$$
\begin{array}{cccccccccccc|ccccccc}
 & 6x^5 & - & 13x^4 & + & 28x^3 & - & 30x^2 & + & 25x & - & 12 & 3x^3 & - & 5x^2 & + & 7x & - & 4 \\
- & (6x^5 & - & 10x^4 & + & 14x^3 & - & 8x^2) & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & & 2x^2 & - & x & + & 3 \\
 & & - & 3x^4 & + & 14x^3 & - & 22x^2 & + & 25x & - & 12 & & & & & & & \\
- & & (- & 3x^4 & + & 5x^3 & - & 7x^2 & + & 4x) & & & & & & & & & \\
 & & & & & 9x^3 & - & 15x^2 & + & 21x & - & 12 & & & & & & & \\
- & & & & & (9x^3 & - & 15x^2 & + & 21x & - & 12) & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & & & & & & &
\end{array}
$$

A chaque étape du calcul, le terme du quotient $Q(x)$ est égal au quotient du premier terme du numérateur (ou du résultat intermédiaire) par le premier terme du dénominateur.
Par exemple:

$$\frac{6x^5}{3x^3} = 2x^2$$

Exemple:

$$
\begin{array}{cccccccccccc|ccccccc}
 & 6x^5 & - & 13x^4 & + & 28x^3 & - & 35x^2 & + & 28x & - & 10 & 3x^3 & - & 5x^2 & + & 7x & - & 4 \\
- & (6x^5 & - & 10x^4 & + & 14x^3 & - & 8x^2) & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & & 2x^2 & - & x & + & 3 \\
 & & - & 3x^4 & + & 14x^3 & - & 27x^2 & + & 28x & - & 10 & & & & & & & \\
- & & (- & 3x^4 & + & 5x^3 & - & 7x^2 & + & 4x) & & & & & & & & & \\
 & & & & & 9x^3 & - & 20x^2 & + & 24x & - & 10 & & & & & & & \\
- & & & & & (9x^3 & - & 15x^2 & + & 21x & - & 12) & & & & & & & \\
 & & & & & & - & 5x^2 & + & 3x & + & 2 & & & & & & &
\end{array}
$$

Le quotient vaut $2x^2 - x + 3$ et le reste $-5x^2 + 3x + 2$.

La fonction donnée peut alors s'écrire:

$$\frac{6x^5 - 13x^4 + 28x^3 - 35x^2 + 28x - 10}{3x^3 - 5x^2 + 7x - 4} = 2x^2 - x + 3 + \frac{-5x^2 + 3x + 2}{3x^3 - 5x^2 + 7x - 4}$$

Si le degré du dénominateur est supérieur à celui du numérateur, le quotient est nul et le reste est égal au numérateur.

Si les polynômes ont plusieurs variables, le résultat de la division va dépendre du choix de la variable par rapport à laquelle se fait la division.

De manière générale, on a:

$$\boldsymbol{\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}}$$

ou encore

$$N(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

avec

- degré(R) < degré(D)
- degré(Q) = degré(N) - degré(D).

5.4 Division par (x-a)

Dans le résultat précédent, supposons que le dénominateur soit du premier degré

$$D(x) = x - a$$

On obtient

$$N(x) = (x - a)Q(x) + R$$

où R est de degré 0, c'est donc un polynôme constant.

En remplaçant x par a dans l'égalité ci-dessus, on obtient le résultat suivant:

Théorème de divisibilité

Le reste de la division de $\boldsymbol{P(x)}$ par $\boldsymbol{(x - a)}$ est égal à $\boldsymbol{P(a)}$

Exemple

$$P(x) = 3x^5 - 28x^4 + 43x^3 + 42x^2 + 2x - 14,\ D(x) = x - 7$$

Comme $P(7) = 0$,le reste R est nul; $P(x)$ est divisible par $x - 7$.

Exemple

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 1,\ D(x) = x - 2$$

le reste de la division vaut $9 = P(2)$.

Corollaire

Un polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$

Exemples

1. $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ est divisible par $x - 1$, car $P(1) = 0$.

2. $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ est divisible par $x + 1$, car $P(-1) = 0$.

3. $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ n'est pas divisible par $2x + 1 = 2(x + 1/2)$, car $P(-1/2) \neq 0$.

4. $P(x) = x^3 - x^2 + x + \frac{7}{8}$ est divisible par $2x + 1 = 2(x + 1/2)$, car $P(-1/2) = 0$.

Théorème

Si $a \neq b$, les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - a)(x - b)$
2. il est divisible par $x - a$ et par $x - b$
3. il admet a et b pour zéros

Preuve:
a) S'il est divisible par $(x - a)(x - b)$ alors $P(x) = (x - a)(x - b)Q(x)$, donc $P(a) = P(b) = 0$.

b) Si $P(x)$ est divisible par $x - a$ et $x - b$, alors $P(x) = (x - a)Q(x) = (x - b)F(x)$.

Calculons $P(b)$:
$P(b) = (b - a)Q(b) = (b - b)F(b) = 0$.
Comme $b - a \neq 0$, on a $Q(b) = 0$.

Donc, d'après le théorème précédent, $Q(x)$ est divisible par $x - b$.
$Q(x) = (x - b)G(x)$, ainsi $P(x) = (x - a)(x - b)G(x)$.

Remarque
Il est essentiel de supposer $a \neq b$ dans le théorème précédent.

Définition
Un polynôme $P(x)$ admet un zéro double a s'il est divisible par $(x - a)^2$, mais pas par $(x - a)^3$.

Théorème
Un polynôme $P(x)$ admet un zéro double "a" si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$ et $P''(a) \neq 0$

5.5 Equations polynomiales

On appelle équation polynomiale d'inconnue x, une équation du type $P(x) = 0$, où $P(x)$ est un polynôme en x. La décomposition de $P(x)$ en facteurs binômes fournit les racines du polynôme. Sur le graphe de $y = P(x)$, les racines sont les abcisses des points situés sur l'axe Ox.

Théorème fondamental de l'algèbre (Gauss, d'Alembert):

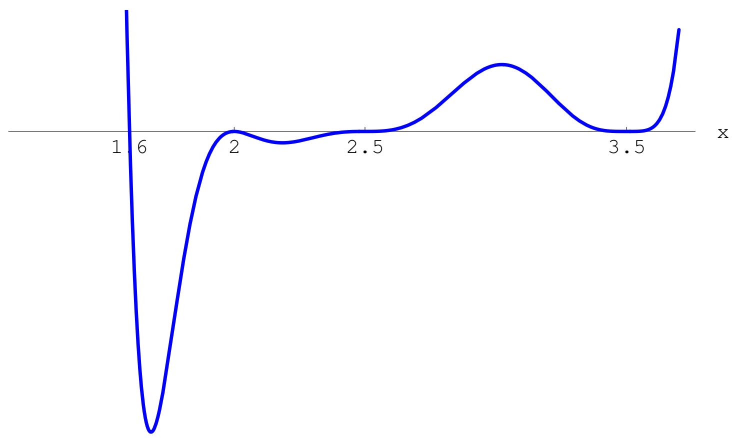

Figure 5: Exemple de zéros simple, double, triple et quadruple

Une équation polynômiale à coefficients réels ou complexes de degré n possède exactement n racines (distinctes ou non, réelles ou complexes)

Une équation polynômiale à coefficient réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

Une équation polynômiale à coefficient réels possède un nombre pair de solutions non réelles.

Exemples:

- $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ possède une racine triple $x = 1$.
- $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ possède une racine réelle et deux racines complexes.
- $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ possède quatre racines complexes.

5.6 Règle de Descartes: Nombre de solutions réelles d'une équation polynômiale réelle

Soit un polynôme à coefficients réels:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Ecrivons les coefficients non nuls de $p(x)$ dans l'ordre en remplaçant chaque coefficient positif par un "+" et chaque coefficient négatif par un "$-$".
Comptons le nombre de changements de signes dans cette suite.

Exemple:

$p(x) = 8x^3 + 3x^2 - x + 1$ donne $+ + - +$ et ainsi 2 changements de signes.

Règle de Descartes:

> **Le nombre de zéros réels positifs de $p(x)$, comptés avec multiplicités, est égal au nombre de changements de signe de $p(x)$ moins un nombre pair.**
>
> **Le nombre de zéros réels négatifs de $p(x)$, comptés avec multiplicités est égal au nombre de changements de signe de $p(-x)$ moins un nombre pair.**

Exemples:

1.
$$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow p(-x) = -x^3 + x^2 - x + 1$$

   Descartes nous donne aucun zéro positif et un ou trois zéros négatifs.

   En fait $p(x)$ n'a qu'un zéro négatif et aucun positif. (Voir figure 6a)

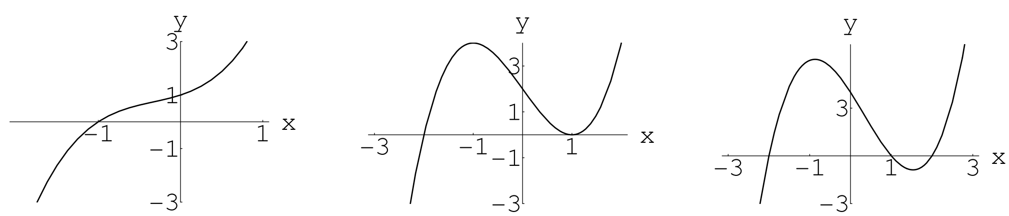

Figure 6: Quelques polynômes

2.
$$p(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow p(-x) = -x^3 + 3x + 2$$

   Descartes nous donne deux ou aucun zéros positifs et un zéro négatif.

   En fait $p(x)$ a un zéro négatif et un zéro positif double. (Voir figure 6b)

3.
$$p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 \Rightarrow p(-x) = -x^3 - x^2 + 4x + 4$$

   Descartes nous donne deux ou aucun zéros positifs et un zéro négatif.

   En fait $p(x)$ a un zéro négatif et deux positifs. (Voir figure 6c)

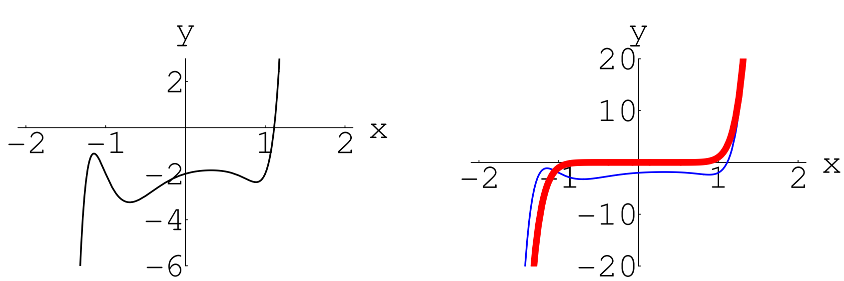

Figure 7: Un polynôme de degré 11 et le graphe du terme dominant $y = x^{11}$,

4. $p(x) = x^{11} + x^8 - 3x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2$,

   $p(x)$ admet 5 changements de signes et $p(-x)$ 2, donc ce polynôme a 1, 3 ou 5 zéros réels positifs et 0 ou 2 négatifs, donc au moins 4 non réels.

   En fait il a un seul zéro réel, et il est positif. (Voir figure 7a)

Comportement asymptotique
Le coefficient a_n de la plus haute puissance de la variable x s'appelle le **coefficient dominant** du polynôme $p(x)$.
Le monôme $a_n x^n$ est le **terme dominant**.

Pour x suffisamment grand (positif ou négatif) un polynôme se comporte comme son terme dominant et a donc le même signe que celui-ci.
On parle du **comportement asymptotique** de $p(x)$. (Voir figure 7b)
On en conclut qu'un polynôme de degré impair s'annule au moins une fois.

Une information supplémentaire est donnée par le signe du terme constant $a_0 = p(0)$, c'est l'ordonnée à l'origine.
S'il est nul, 0 est solution, si en plus $a_1 = 0$, alors 0 est solution double.

Exemple:
Le polynôme $x^6 - x - 1$ admet au moins un zéro réel positif et un zéro réel négatif, car il est positif pour x suffisamment grand et il vaut -1 en $x = 0$.(Voir figure 8)

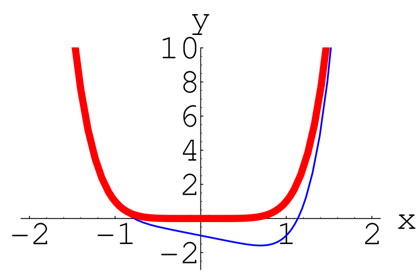

Figure 8: Un polynôme de degré 6 et le graphe du terme dominant $y = x^6$,

5.7 Quotients remarquables

m	Le polynôme est divisible par:	x + a	x - a
pair	$x^m - a^m$	vrai	vrai
impair	$x^m - a^m$	faux	vrai
pair	$x^m + a^m$	faux	faux
impair	$x^m + a^m$	vrai	faux

Exemples:

- $x^4 - a^4$ est divisible par $x - a$ et par $x + a$, et se factorise

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2)$$

- $x^5 - a^5$ est divisible par $x - a$, mais pas par $x + a$, et se factorise

$$x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4)$$

- $x^4 + a^4$ n'est divisible ni par $x - a$, ni par $x + a$, on n'a pas de factorisation avec des termes du premier degré, mais une factorisation avec des termes du second degré est possible:

$$x^4 + a^4 = \left(a^2 - \sqrt{2}\, a\, x + x^2\right) \left(a^2 + \sqrt{2}\, a\, x + x^2\right)$$

6 Etude de fonctions rationnelles

6.1 Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle en x est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes en x. Les règles arithmétiques concernant les fractions s'appliquent aussi aux fractions rationnelles.

Toute fraction peut être décomposée, par une division algébrique, en une somme d'un polynôme et d'une fraction dont le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur.

Exemple

$$\frac{x^2+3x+5}{x+2} = x+1+\frac{3}{x+2}$$

Les sommes, les produits et les quotients de fractions rationnelles sont encore des fractions rationnelles:

Exemples

- $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{3x-2}=\dfrac{5x+2}{(x+2)(3x-2)}$
- $\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{4}{(x+2)^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+6x-4}{x(x+2)^2}$
- $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3x-1}{x^2+2}-\dfrac{1}{(x^2+2)^2}=\dfrac{4x^4-4x^3+11x^2-9x+7}{(x-1)(x^2+2)^2}$

Remarque
Il est essentiel de noter que l'addition des fractions rationnelles se fait en prenant le plus petit multiple commun des dénominateurs PPMC, et non pas leur produit.

Exemples

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{...}{12}\neq\frac{...}{24}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{...}{(x-1)(x-2)(x-3)}\neq\frac{...}{(x-1)^2(x-2)(x-3)}$$

Faire le produit donnera un calcul plus compliqué, puis une fraction devant être simplifiée (pas évident).
Enfin, dans le cas de la décomposition en éléments simples (intégrales, transformation de Laplace), cela donnera des erreurs de calcul très ennuyeux.

6.2 Simplification des fractions rationnelles

Lorsque le numérateur et le dénominateur d'une fraction ont un diviseur commun, la fraction peut être simplifiée.

Exemple

$$\frac{x^2+x-12}{x^2-8x+15} = \frac{(x-3)(x+4)}{(x-5)(x-3)} = \frac{x+4}{x-5}$$

Pour simplifier une fraction rationnelle, il est nécessaire de factoriser les polynômes du numérateur et du dénominateur.
La fraction est simplifiée lorsqu'on a divisé le numérateur et le dénominateur par leur PGDC.

Le calcul du PGDC de deux polynômes est obtenu par l'algorithme d'Euclide.

Exemple
Simplifier

$$\frac{x^6+x^5+x^4-x^3-2x^2-2x-1}{x^4+x^3-x-1} = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$$

On divise $p_1(x)$ par $p_2(x)$, on trouve un reste $p_3(x)$:

$$x^6+x^5+x^4-x^3-2x^2-2x-1 = (x^4+x^3-x-1)(x^2+1) + (-x^3-x^2-x)$$

On divise $p_2(x)$ par $p_3(x)$, on trouve un reste $p_4(x)$:

$$x^4+x^3-x-1 = (-x^3-x^2-x)(-x) + (-x^2-x-1)$$

On divise $p_3(x)$ par $p_4(x)$, on trouve un reste $p_5(x)$:

$$-x^3-x^2-x = (-x^2-x-1)(x) + (0)$$

On s'arrête car le reste est nul.

Le PGDC est l'avant-dernier reste, soit

$$-x^2-x-1$$

On simplifie par le PGDC et on obtient la fraction simplifiée:

$$\frac{-x^4+x+1}{-x^2+1}$$

Une fonction rationnelle est donnée par le quotient de deux polynômes, en faisant la division euclidienne, on obtient:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}} \tag{43}$$

L'étude d'une fonction comprend généralement la recherche de l'ensemble de définition, des points sur les axes, du signe, des asymptotes, des symétries et le graphe de celle-ci, le cours d'anlyse permettra de déterminer la croissance, les extrema, la courbure et les points d'inflexions.

6.3 Ensemble de définition

Une fonction rationnelle n'est pas définie si son dénominateur s'annule, ainsi on est amené à résoudre l'équation

$$D(x) = 0$$

Exemple 1:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$$

n'est pas définie si $x = \pm 1$.

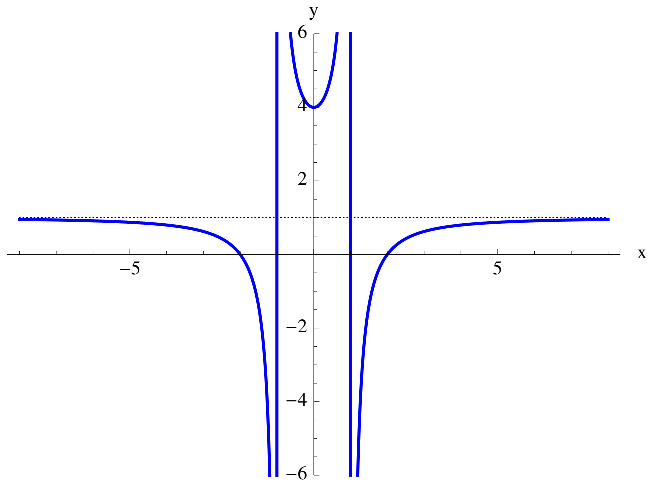

Figure 9: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$.

6.4 Symétries

6.4.1 Fonctions paires

Une fonction est **paire** si elle vérifie, pour tous les x où elle est définie

$$f(-x) \equiv f(x)$$

Les puissances paires de x sont des fonctions paires.
Une constante étant une puissance zéro de x est donc une fonction paire.
L'exemple précédent est une fonction paire.
Un autre exemple de fonction paire est la fonction cosinus, qui ne fait pas partie des fonctions rationnelles.
Géométriquement, cela se traduit par un **axe de symétrie** Oy.
Il suffit ainsi d'étudier la fonction pour les x positifs.

6.4.2 Fonctions impaires

Une fonction est **impaire** si elle vérifie, pour tous les x où elle est définie

$$f(-x) \equiv -f(x)$$

Une puissances impaire de x est une fonction impaire.
Un autre exemple de fonction impaire est la fonction sinus, non rationnelle.
Géométriquement, cela se traduit par un **centre de symétrie** O.
Ici aussi, il suffit d'étudier la fonction pour les x positifs.

Exemple 2:

6.4.3 Combinaisons

En général, une fonction n'est ni paire, ni impaire.
Les deux tableaux ci-après donne la parité d'une combinaison de deux fonctions, produit ou quotient, somme ou différence, ils se justifient par la règle des signes.
Justifions la dernière case du second tableau:

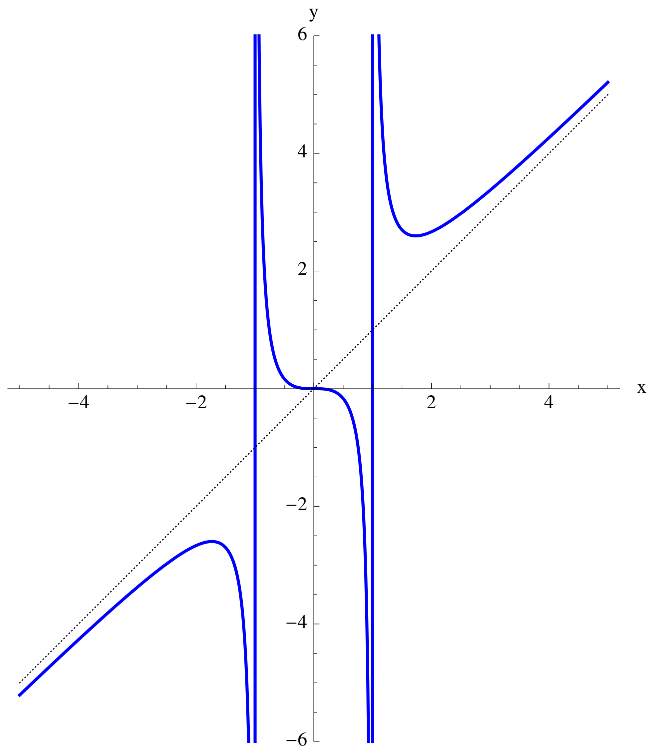

Figure 10: $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Table 1: Parité du produit de deux fonctions

*	p	i
p	p	i
i	i	p

Table 2: Parité de la somme de deux fonctions

+	p	i
p	p	x
i	x	i

La somme $h(x) = f(x) + g(x)$ de deux fonctions impaires $f(x)$ et $g(x)$ est une fonction impaire:

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -h(x)$$

Ainsi

$$x^2 + 1 \qquad 5x^4 + 3, \qquad \frac{x^2}{x^4+1} \qquad \frac{x^3}{\sin(x)}$$

sont paires

$$x^3 \qquad \frac{x^3}{x^2+1} \qquad \frac{x^3}{\cos(x)}$$

sont impaires

$$x^3+1 \qquad \frac{x^3}{x^3+1} \qquad \frac{x^3}{1+\cos(x)}$$

ne sont ni paires ni impaires.

6.5 Points sur les axes

6.5.1 Ordonnée à l'origine

Si $x = 0$ fait partie de l'ensemble de définition de $f(x)$, alors le point sur l'axe Oy admet les coordonnées

$$(0; f(0))$$

f(0) est l'ordonnée à l'origine.

6.5.2 Zéros

Les points sur l'axe Ox sont les solutions de l'équation

$$N(x) = 0$$

faisant partie de l'ensemble de définition de $f(x)$.

La fonction de l'exemple 1 admet les deux zéros 2 et -2.

Celle de l'exemple 2 n'admet que le zéro 0, qui est un zéro triple, la fonction traverse l'axe Ox trois fois en ce point, elle est tangente à Ox et sa courbure change de signe.

6.6 Signe

Un tableau d'étude du signe donnera la position de la courbe par rapport à l'axe Ox.
Reprenons l'exemple 1.

x		-2		-1		1		2	
x^2-4	+	0	-	-	-	-	-	0	+
x^2-1	+	+	+	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	+	0	-	∞	+	∞	-	0	+

6.7 Asymptotes

6.7.1 Asymptotes verticales

Ces asymptotes ont pour équations

$$\boldsymbol{x = x_0}$$

x_0 étant une valeur annulant le dénominateur et n'annulant pas le numérateur de $f(x)$.

Si le numérateur et le dénominateur s'annulent en x_0, alors la fraction se présente ainsi

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{(x - x_0)N_0(x)}{(x - x_0)D_0(x)} \approx f_0(x) = \frac{N_0(x)}{D_0(x)}$$

On simplifie donc celle-ci et on recommence, si nécessaire l'opération.

Si la fonction simplifiée est définie en x_0, on dit que $f(x)$ est prolongeable par continuité, $f_0(x)$ étant sa prolongée, les deux courbes ne différent que par le point $P_0(x_0; f_0(x_0))$, où f admet un "trou".

6.7.2 Comportement asymptotique

Il s'agit d'étudier le comportement de $f(x)$ lorsque $x \to \infty$.

Lorsque $x \to \infty$, une fraction se comporte comme le quotient des termes dominants.

$$f(x) = \frac{a_n x^n + ...}{b_m x^m + ...} \approx \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m}\ x^{n-m}$$

Ainsi, si $n < m$ la courbe tend vers 0, et sinon elle tend vers une courbe de degré $n - m$.

Remarque:
Les asymptotes d'une fonction rationnelle sont les mêmes pour $x \to -\infty$ et pour $x \to \infty$.

On distingue quatre cas:

1. $n < m$
$$y = 0$$
est asymptote horizontale.
2. $n = m$
$$y = \frac{a_n}{b_m}$$
est asymptote horizontale.
3. $n = m + 1$
$$y = \frac{a_n}{b_m}\ x + h$$
est asymptote oblique.
4. $n > m + 1$
$$y = \frac{a_n}{b_m}\ x^{n-m} + ...$$
est asymptote polynomiale.

Dans les deux derniers cas, il manque l'équation complète de l'asymptote, pour la déterminer, le plus simple est de reprendre la division euclidienne (43).

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}} \tag{44}$$

Comme le degré de R est inférieur à celui de D, le dernier terme tend vers 0 lorsque $x \to \pm\infty$ et donc l'équation de l'asymptote est

$$\boldsymbol{y = Q(x)} \tag{45}$$

On s'intéresse aussi à la position de la courbe par rapport à son asymptote, est-elle au-dessus ou au-dessous, coupe-t-elle celle-ci en certains points?
Celle-ci est donnée par l'étude du signe de

$$f(x) - Q(x) = \frac{R(x)}{D(x)}$$

Exemples:

1. $$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1} = 1 - \frac{3}{x^2-1}$$

x		-1		1	
-3	-	-	-	-	-
x^2-1	+	0	-	0	+
$\frac{R(x)}{D(x)}$	-	∞	+	∞	-

La courbe ne traverse jamais son asymptote.

Le graphe est donné à la figure (9).

2. $$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$$

x		-1		0		1	
x^3	-	-	-	0	+	+	+
x^2-1	+	0	-	-	-	0	+
$\frac{R(x)}{D(x)}$	-	∞	+	0	-	∞	+

La courbe traverse son asymptote lorsque $x = 0$, donc au point $(0; 0)$.

Le graphe est donné à la figure (10).

3. $$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

L'asymptote est la droite $y = 0$, donc la position est donnée par le signe de la fonction.

Le graphe est donné à la figure (11).

La courbe traverse son asymptote lorsque $x = 0$, donc au point $(0; 0)$.

4. $$f(x) = \frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

L'asymptote est donc la parabole $y = x^2 - 1$ et la courbe ne la coupe jamais.

Le graphe est donné à la figure (12).

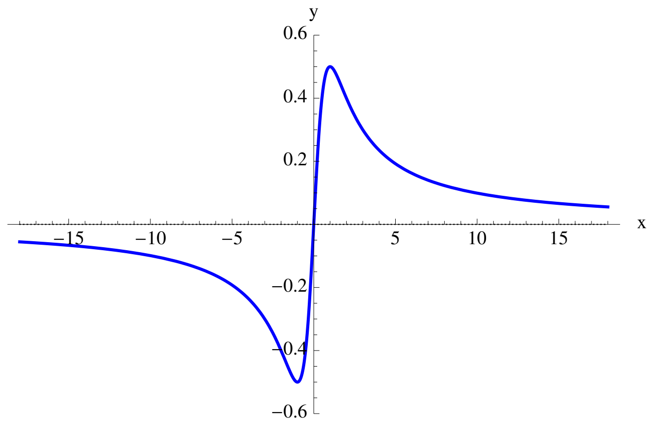

Figure 11: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

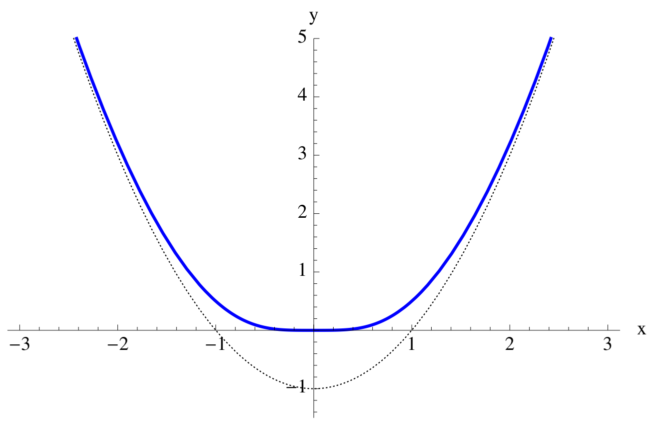

Figure 12: $f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$.

6.8 Graphe

Voici un dernier exemple, un peu plus compliqué. Le graphe est une courbe du cinquième degré. Le numérateur est déjà factorisé, sinon, en général, aucune formule ne permet de trouver les zéros.

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)(x-3)}{x^4+x^2+1} = x - 3 + \frac{-6x^3+18x^2+3x-9}{x^4+x^2+1}$$

La fonction est toujours définie et n'a donc pas d'asymptotes verticales, de plus le dénominateur est toujours strictement positif, et ainsi la fonction a le même signe que son numérateur.

L'asymptote oblique $y = x - 3$ est coupée trois fois par la courbe, car $-6x^3 + 18x^2 + 3x - 9$ s'annule pour les valeurs $x = 3, -\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le graphe est donné à la figure (13).

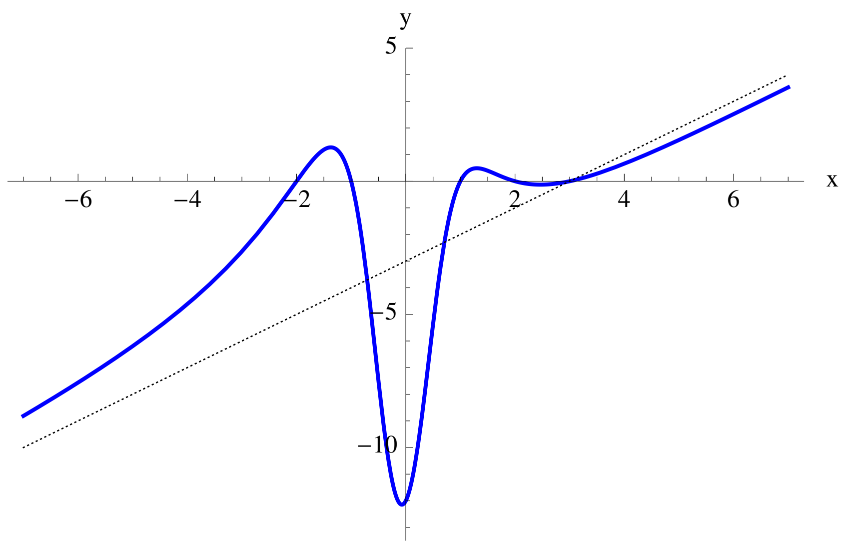

Figure 13: $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)(x-3)}{x^4+x^2+1}$.

6.9 Approximation linéaire

Exemples d'approximations linéaires:
Nous allons présenter quelques formules très simples et très utilisées permettant d'estimer une grandeur numérique ou d'approximer une grandeur littérale.

Le développement du binôme donne:

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\,\varepsilon + \frac{1}{2}\,n(n-1)\,\varepsilon^2 + ...$$

Si $\varepsilon \approx 0$, on peut négliger les derniers termes:

$$\boldsymbol{\varepsilon \approx 0 \Rightarrow (1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\,\varepsilon} \tag{46}$$

En donnant des valeurs particulières à $n, n = -1, 2, 1/2, -1/2$, on obtient les formules suivantes, que l'on peut combiner:

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon \tag{47}$$

$$(1+\varepsilon)^2 \approx 1 + 2\,\varepsilon \tag{48}$$

$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon \tag{49}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \approx 1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon \tag{50}$$

7 Exercices

7.1 Valeurs absolues

Exercice 1
Résoudre les équations suivantes:

a) $|x| = x$

b) $|x|^2 = -x$

c) $|-x| = x$

d) $x^2 = -x$

e) $x^2 = |x|^2$

f) $|x-2| = 3$

g) $|x-2| = 2 - |3+x|$

h) $|x^2-2| = 3 - x$

Exercice 2
Etudier la fonction

$$f(x) = |x+3| + 2|x-2| - 3|x-4|$$

7.2 Exposants et racines

Exercice 3
Effectuer:

i) $(4^{-4})(-1)^{-4}$ *ii)* $(3^{-2})/(3^4)$ *iii)* $(4^{-3}/4^{-2})^{-2}$

iv) $2^n 2^{-n+1}$ *v)* $\left((-1)^{-2n+1}\right)^{2n-1}$ *vi)* $\dfrac{(3^n)(3^{-n+1})}{(-1)^{2n}(-3)^{-2n}}$, $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 4
Rendre rationnels les dénominateurs:

i) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ *ii)* $\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}$

Exercice 5
Effectuer et simplifier:

$$x^{m-1}\sqrt[m]{\frac{x^{m+1}}{x}}\sqrt[m]{\frac{x^m}{m}}$$

Exercice 6
Effectuer et simplifier:

$$\sqrt[11]{\left[\left(\sqrt{a^3b^2c}\right)^4\left(\sqrt[3]{a^4b^2c}\right)^5\right]^3}$$

Exercice 7
Effectuer et simplifier:

$$\left(x^{2/3} - x^{-2/3}\right)^3 + 3\left(x^{2/3} - x^{-2/3}\right)$$

Exercice 8
Effectuer et simplifier:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

Exercice 9
Rendre rationnel le dénominateur de la fraction:

$$\frac{c\sqrt{a}+a\sqrt{c}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$$

7.3 Equations et inéquations du premier degré

Exercice 10
Résoudre et vérifier les solutions
1)

$$\frac{4x-3}{2x-1}=\frac{4x-7}{2x-5}$$

2)

$$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{x^2+5x+6}$$

3)

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-7}{x-8}$$

4)

$$\left(\frac{x+1}{x-1}:\frac{x-1}{x+1}\right):\left(1+\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}$$

5)

$$\frac{2x+1}{x^2-3x}-\frac{2x+3}{x^2+3x}=\frac{19}{x^2-9}$$

6)

$$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{2x+4}{x^2-1}$$

7)

$$\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+2}=\frac{7x+6}{x^2-4}$$

8)

$$\frac{1+4x}{1-4x}=\frac{3+16x^2}{1-16x^2}$$

Exercice 11
Résoudre:

1) $x^2-x=0$

2) $x^2-3x=\dfrac{2x}{3}-2$

3) $7x^2 = 4x$

4) $2x(x-1) = x(2x+7)$

5) $(x-1)(x-2)(3x-8) = 0$

6) $(2x-7)(5x+3) = 8(4x^2-49)$

7) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = x(4-x^2)(4-x)$

8) $(2x^2+3x+1)^2 - (2x^2-4x-1)^2 = 0$

Exercice 12
Résoudre:
1)

$$x + \frac{1}{x-3} = 5$$

2)

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$$

3)

$$\frac{x+2}{1+2x} = \frac{x+4}{3+4x}$$

4)

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-4}{x+4} = 3$$

Exercice 13
Résoudre:

$$\frac{(x+3)(5-2x)}{4x-1} \geq 0$$

Exercice 14
Résoudre les systèmes:
a)

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{2x+3}{3} & \geq & \frac{5x}{7} \\ (3x-5)(x-1) & \leq & 3x^2+7x+3 \end{array} \right\}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 5x+5 & \leq & 7x \\ x-1 & \leq & 7 \\ 3x+5 & \leq & 7x-8 \end{array} \right\}$$

c)

$$\frac{2x+1}{5} \geq x - \frac{4x-5}{3}$$

7.4 Equations et inéquations du second degré

Exercice 15
Résoudre:

a) $x^2 \geq 4x + 5$

b) $3x^2 + 2x + 2 \leq 2x^2 + x + 4$

c) $(x + 5)(x - 1)(x - 2) \leq 0$

Exercice 16
Résoudre:
a)
$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 7x + 12} \geq 0$$
b)
$$\frac{3x^2 - 7x - 20}{x^2 + 4x - 12} \leq 0$$
c)
$$1 + \frac{x - 4}{x - 3} \geq \frac{x - 2}{x - 1}$$
d)
$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} \geq \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 4x + 3}$$

7.5 Division polynômiale et zéros des polynômes

Exercice 17
Effectuer la division polynômiale:

$(4x^3 + 4x^2 - 29x + 21) : (2x - 3)$

Exercice 18
Diviser le polynôme $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ *par* $x + 2$, $x - 2$, $x^2 - 7x + 1$, $x^2 - 7x + 12$ *et* $x^4 - 1$.
Donner chaque fois le quotient et le reste.

Exercice 19
Même exercice, diviser $x^3 + 2x^2 - x - 2$ *par* $x + 2$, $x - 2$ *et* $x^2 - 1$.

Exercice 20
Déterminer a *de telle sorte que la division se termine exactement:*

1. $(x^2 + ax + 6) : (x - 2)$
2. $(x^4 - 3x^2 + 3x - a) : (x - 3)$.

Exercice 21
Le polynôme $p(x) = -24x^3 - 38x^2 + 9x + 18$ *est-il divisible par* $x - 1$? *par* $x + 1$? *par* $x - 2/3$?
S'annule-t-il en $x = -3/4$? *en* $x = -3/2$?
Décomposer $p(x)$ *en produit de trois polynômes du premier degré.*

Exercice 22
Déterminer a *de sorte que le polynôme* $p(x) = ax^3 - x + a$ *soit divisible par* $x + 2$.

Exercice 23
Déterminer b *de sorte que le polynôme* $p(x) = x^3 + bx^2 - b$ *soit divisible par* $x + 3$.

Exercice 24
Soit $p(T) = T^3 + T^2 - T + \mu$, *calculer les valeurs possibles de* μ *pour que ce polynôme soit divisible par* $T + \mu$.

Exercice 25
Donner le maximum d'information sur le nombre de racines réelles positives, négatives ou nulles des polynômes suivants:
a) $x^4 + x^2 + 1$
b) $x^4 - x^2 + 1$
c) $x^4 - x^2 - 1$
d) $x^4 - x^2$
e) $x^4 - x^3 + x^2 - 1$
f) $x^4 - x^3 + x^2 + 1$
g) $x^5 - x + 1$
h) $x^5 - x - 1$
i) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

Exercice 26
Mettre sous la forme d'une fraction rationnelle:
i)

$$1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

ii)

$$\frac{\left(a - \frac{x^2}{a}\right)\left(\frac{a^2+x^2}{ax} + 2\right)}{\frac{1}{ax} + \frac{2}{a^2+x^2}}$$

8 Corrigés

Corrigé ex 1

a) $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$

b) $|x|^2 = -x \Leftrightarrow x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = -1$

c) $|-x| = x \Leftrightarrow |x| = x$. *Voir ex a)*

d) *Voir ex b)*

e) $x^2 = |x|^2 \Leftrightarrow x^2 = x^2$. *Toujours vrai*

f) $|x-2| = 3$. *Cela signifie que la distance de* x *à* 2 *est* 3.

Donc $x = -1$ *ou* $x = 5$

g) $|x-2| = 2 - |3+x|$.

Pour déterminer les valeurs absolues, il faut distinguer la position de x *par rapport à* 2 *et* -3. *Donc trois cas:*

Cas 1 $x < -3$**:** *L'équation devient* $-(x-2) = 2 - -(3+x)$ *dont la solution,* $x = -3/2$, *n'est pas admissible car supérieure à* -3.

Cas 2 $-3 \leq x \leq 2$**:** *L'équation devient* $-(x-2) = 2-(3+x)$ *qui n'a pas de solutions.*

Cas 3 $x > 2$**:** *L'équation devient* $(x-2) = 2-(3+x)$ *dont la solution,* $x = 1/2$, *n'est pas admissible car inférieure à* 2.

Finalement il n'y a pas de solutions.

h) $|x^2 - 2| = 3 - x$

Pour déterminer les valeurs absolues, il faut distinguer la position de x *par rapport à* $-\sqrt{2}$ *et* $\sqrt{2}$. *Donc deux cas:*

Cas 1 $x < -\sqrt{2}$ **ou** $x > \sqrt{2}$**:**

L'équation devient $+(x^2-2) = 3 - x$ *dont les solutions,* $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$, *sont toutes deux admissibles.*

Cas 2 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$**:**

L'équation devient $-(x^2-2) = 3 - x$ *qui n'a pas de solutions.*

Finalement il y a les deux solutions du premier cas.

Corrigé ex 2

Le graphe de la fonction est donné par la figure (14).

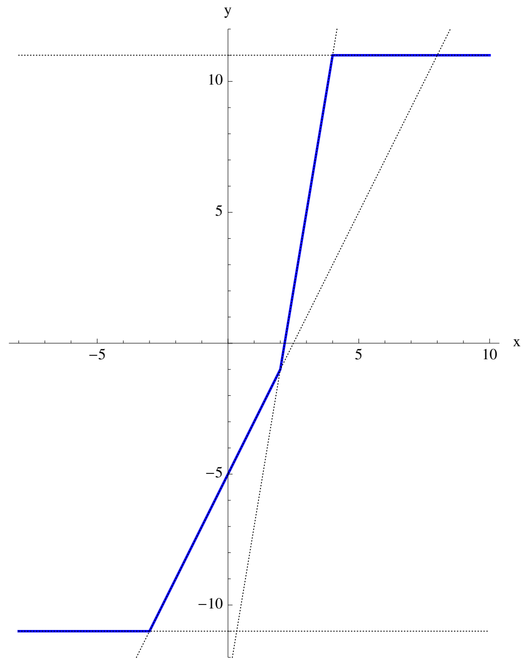

Figure 14: $f(x) = |x+3| + 2|x-2| - 3|x-4|$

Corrigé ex 3

i)

$$\frac{1}{256}$$

ii)

$$\frac{1}{729}$$

iii)

$$16$$

iv)

$$2$$

v)

$$-1$$

vi)

$$3^{2n+1}$$

Corrigé ex 4

i)

$$\frac{\sqrt{6}}{3}$$

ii)

$$\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$$

Corrigé ex 5

$$\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{m}}$$

Corrigé ex 6

$$a^{38/11}b^2c = a^3b^2c\sqrt[11]{a^5}$$

Corrigé ex 7

$$x^2 - x^{-2}$$

Corrigé ex 8
En posant $A = \sqrt{x^2+1}$ *et* $B = \sqrt{x^2-1}$, *on trouve* $2x^2$.

Corrigé ex 9

$$\frac{c\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + bc}{ab - b^2}$$

Corrigé ex 10
1) 1
2) 1
3) 5
4) $-1/3$
5) $4/3$
6) pas de solution.
7) $x = 2/3$
8) pas de solution.

Corrigé ex 11
1) $0; 1$
2) $3; 2/3$
3) $0; 4/7$
4) 0
5) $1; 2; 8/3$
6) $7/2; -53/11$
7) $2; 4; 1/2$
8) $0; 1/4; -2/7$

Corrigé ex 12
1) $4; 4$
2) $2; -2$
3) Aucune solution
4) $2; -3/2$

Corrigé ex 13

$$S =]-\infty; -3] \cup]\frac{1}{4}\ ;\ \frac{5}{2}]$$

Corrigé ex 14
a)

$$S = [\frac{2}{15}\ ;\ 21]$$

b)

$$S = [\frac{13}{4} \; ; \; 8]$$

c)

$$S = [2 \; ; \; \infty[$$

Corrigé ex 15
a)

$$S =]-\infty \; ; \; -1] \; \cup \; [5 \; ; \; +\infty[$$

b)

$$-2 \leq x \leq 1$$

c)

$$S =]-\infty \; ; \; -5] \; \cup \; [1 \; ; \; 2]$$

Corrigé ex 16
a)

$$S =]-\infty \; ; \; +1] \cup]3 \; ; \; 4[\cup [5 \; ; \; +\infty[$$

b)

$$S =]-6 \; ; \; -\frac{5}{3}] \cup]2 \; ; \; 4]$$

c)

$$S =]-\infty \; ; \; 2-\sqrt{3}] \cup]1 \; ; \; 3[\cup [2+\sqrt{3} \; ; \; +\infty[$$

d)

$$S =]3 \; ; \; 4] \cup]5 \; ; \; +\infty[$$

Corrigé ex 17

$$2x^2 + 5x - 7 \qquad R = 0$$

Corrigé ex 18
Résultats:

Diviseur	*Reste*	*Quotient*
$x+2$	-120	$x^2 - 11x + 48$
$x-2$	0	$x^2 - 7x + 12$
$x^2 - 7x + 1$	$11x - 22$	$x - 2$
$x^2 - 7x + 12$	0	$x - 2$
$x^4 - 1$	$x^3 - 9x^2 + 26x - 24$	0

Corrigé ex 19
Résultats:

Diviseur	*Reste*	*Quotient*
$x+2$	0	$x^2 - 1$
$x-2$	12	$x^2 + 4x + 7$
$x^2 - 1$	0	$x + 2$

Corrigé ex 20
i)

$$-5$$

ii)

$$63$$

Corrigé ex 21
i) Le polynôme n'est pas divisible par $x-1$, car $p(1)=-35\neq 0$.
ii) Le polynôme n'est pas divisible par $x+1$, car $p(-1)=-5\neq 0$.
iii)Le polynôme est divisible par $x-2/3$, car $p(2/3)=0$.
iv) Le polynôme est divisible par $x+3/4$, car $p(-3/4)=0$.
v) Le polynôme est divisible par $x+3/2$, car $p(-3/2)=0$.
Donc le polynôme se factorise ainsi: $(2-3x)(3+2x)(3+4x)=-24(x+\dfrac{3}{2})(x-\dfrac{2}{3})(x+\dfrac{3}{4})$.

Corrigé ex 22

$$a=\frac{2}{7}$$

Corrigé ex 23

$$b=\frac{27}{8}$$

Corrigé ex 24
Le reste de la division de $p(T)$ par $T+\mu$ vaut $p(-\mu)=2\mu+\mu^2-\mu^3$.
Equation qui admet les solutions $\mu=0,\mu=-1$ et $\mu=2$.

Corrigé ex 25
Voir la figure (15).
a) 0 racine réelle.
b) 0 ou 2 racines positives et 0 ou 2 négatives.
c) 1 positive et 1 négative.
d) 1 positive et 1 négative. Le terme constant donne 2 nulles.
e) 1 ou 3 positives et 1 négative.
f) 0 ou 2 positives et 0 négative.
g) 0 ou 2 positives et 1 négative.
h) 1 positive et 0 ou 2 négatives.
i) 1, 3 ou 5 positives et 0 négative.

Corrigé ex 26
i)

$$\frac{1}{1-x}$$

ii)

$$\frac{a^4-x^4}{a}$$

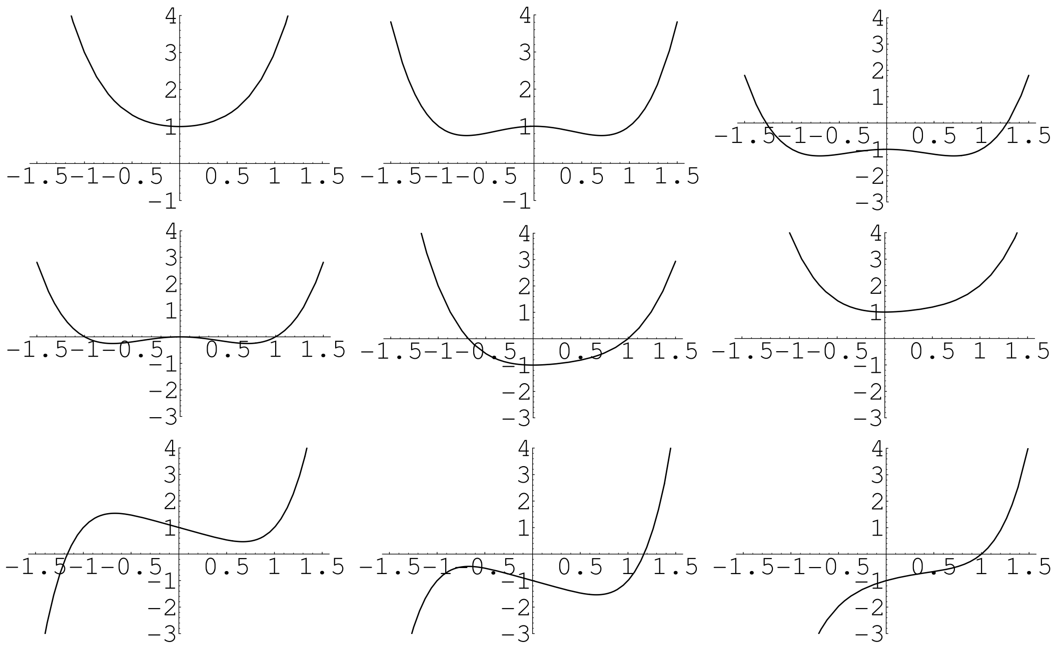

Figure 15: Polynômes

9 Bibliographie

- Mathématiques de bases de F. Ayres (Collection Schaum - Mac Graw Hill)
- Traité d'Algèbre (Schons - La Procure - Namur)
- The Algebra & Trigonometry Problem Solver REA