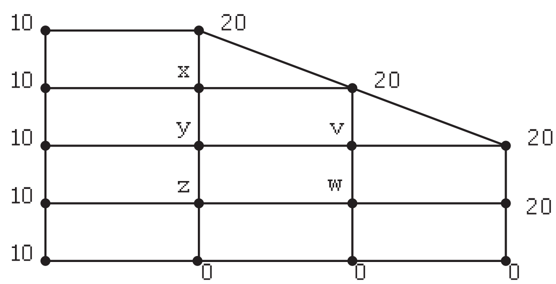
heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

ALGÈBRE LINÉAIRE I

Version 2012

Lang Fred



$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \\ 10 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Table des matières

1 Systèmes d'équations linéaires

1.1 Exemple de système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 & = & 3 \end{array} \right\}$$

est un exemple de système de 3 équations à 3 inconnues.
Ce système est linéaire, car les inconnues figurent toutes au **premier degré** et il n'y a **pas de produits d'inconnues** ($x_1 x_2$ par exemple).

1.2 Notation matricielle et produit matriciel

Notons V_n l'ensemble des vecteurs à n composantes. C'est un espace vectoriel de dimension n, car tout vecteur peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de n **vecteurs de base**.
Par exemple, pour $n = 3$, les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forment une base.

Un vecteur arbitraire se décompose de manière unique dans une base:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On définit la **somme** de deux vecteurs:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

et le **produit d'un vecteur par un nombre**:

$$k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix}$$

Les propriétés usuelles d'associativité, de commutativité et de distributivité sont alors vérifiées.

On peut écrire un système d'équations sous forme vectorielle.
Par exemple, le système précédent s'écrit:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Les inconnues et le membre de droite forment eux-mêmes des vecteurs:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Les coefficients du membre de gauche du système définissent la **matrice** (tableau) à 3 lignes et 3 colonnes 3/3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Une matrice quelconque s'écrit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

On note a_{ij} l'élément du tableau se trouvant à la ligne i et à la colonne j.

Par exemple,

$$a_{23} = -1 \ \text{ et } \ a_{32} = -5.$$

Un **vecteur-colonne** est une matrice à n lignes et 1 colonne.
Un **vecteur-ligne** est une matrice à n colonnes et 1 ligne.

En notation matricielle un système linéaire s'écrit

$$\boldsymbol{AX = V} \tag{1}$$

Le **produit** de la matrice A par le vecteur X est ainsi défini:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 \end{bmatrix}$$

Le vecteur résultant est obtenu en faisant les **produits scalaires des différents vecteurs-lignes de la matrice** A **par le vecteur** X.

1.3 Opérations matricielles

L'**addition des matrices** se définit comme celle des vecteurs, composante par composante.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

Le **produit d'un scalaire** k **par une matrice** A se définit de même:

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$$

Le **produit de la matrice** A **par la matrice** B est ainsi défini:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 & 2y_1 + 3y_2 - 4y_3 & 2z_1 + 3z_2 - 4z_3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 & 3y_1 + 2y_2 - y_3 & 3z_1 + 2z_2 - z_3 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 & y_1 - 5y_2 - 3y_3 & z_1 - 5z_2 - 3z_3 \end{bmatrix}$$

Comme on le voit, il suffit de faire le produit de A par les différentes colonnes de B.

De manière générale:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

ou

$$\boldsymbol{c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}b_{kj}} \tag{2}$$

ou

$$C = AB$$

ou encore

"La colonne i de C s'obtient en appliquant A à la colonne i de B ".

ou enfin

"c_{ij} **est le produit scalaire de la ligne** i **de** A **par la colonne** j **de** B ".

Le produit d'une matrice A de dimensions m/n et d'une matrice B de dimensions n/p est une matrice $C = AB$ de dimensions m/p.
Le produit matriciel peut s'effectuer si les dimensions vérifient:

$$\frac{m}{n}\,\frac{n}{p} = \frac{m}{p}$$

En particulier la multiplication d'un vecteur ligne $1/n$ par un vecteur colonne $n/1$ est une matrice $1/1$, leur produit scalaire:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = ar + bs + ct$$

1.4 Matrices particulières

La **matrice identité** I **ou** I_n

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un multiple kI de la matrice identité est une **matrice scalaire**

$$kI_3 = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Multiplier une matrice A par k revient à la multiplier par la matrice kI

$$kA = kI \cdot A$$

Si le scalaire est nul, on a la **matrice nulle** notée 0:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Une **matrice diagonale** n'a que les éléments diagonaux non nuls:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Une matrice dont les seuls éléments non nuls sont situés au-dessus de la grande diagonale est dite **matrice triangulaire supérieure**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Une matrice n/n est dite **matrice carrée**.

1.5 Matrice inverse

Une matrice carrée A est dite **inversible** s'il existe une matrice B telle que

$$AB = I = BA$$

Une telle matrice, si elle existe, est nécessairement unique, c'est la **matrice inverse** de A, elle se note

$$\boldsymbol{A^{-1}}$$

Ainsi

$$\boldsymbol{AA^{-1} = I = A^{-1}A} \tag{3}$$

Une matrice inversible doit nécessairement être carrée.[1] Mais toute matrice carrée n'est pas nécessairement inversible! Plus loin, nous établirons le critère suivant:

"A **est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul**".

[1]Sinon les produits AA^{-1} et $A^{-1}A$ n'existent pas.

En gros, résoudre un système $AX = V$, c'est "isoler X", c'est-à-dire arriver à $X = ...$
Si A est inversible, on peut multiplier chaque membre du système par A^{-1}, on obtient

$$\boldsymbol{AX = V} \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}V \Leftrightarrow IX = A^{-1}V \Leftrightarrow \boldsymbol{X = A^{-1}V}$$

Ainsi le système admet une unique solution si la matrice est inversible.

1.6 Propriétés des opérations matricielles

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $k(A + B) = kA + kB$
6. $A(BC) = (AB)C$
7. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
8. $A(B + C) = AB + AC$
9. $(B + C)A = BA + CA$
10. $IA = AI = A$
11. $0A = A0 = 0$
12. $\boldsymbol{AB \neq BA}$ en général
13. $\boldsymbol{AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0}$ ou $\boldsymbol{B = 0)}$, en général
14. $\boldsymbol{AC = BC \Rightarrow A = B}$ est vrai si C est inversible, mais faux en général
15. $(A^{-1})^{-1} = A$ si A^{-1} existe
16. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ si A^{-1} et B^{-1} existent

1.7 Transposée d'une matrice

Transposer une matrice, c'est écrire ses colonnes en lignes. Autrement dit, c'est faire une symétrie relativement à la grande diagonale.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

On note A^t **la transposée de** A.
Si A est une matrice n/m, alors sa transposée A^t est une matrice m/n.
En particulier le transposé d'un vecteur-ligne est un vecteur-colonne et réciproquement.
La transposition a les propriétés suivantes:

1. $(A^t)^t = A$

2. $(AB)^t = B^t A^t$

3. $(A+B)^t = A^t + B^t$

4. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Une matrice carrée est **symétrique** si elle est égale à sa transposée:

$$A^t = A$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

Ces matrices sont utilisées pour écrire les équations des coniques.

Elle est **antisymétrique** si elle est égale à l'opposée de sa transposée:

$$A^t = -A$$

cela implique que les coefficients diagonaux sont nuls.

Exemple:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

2 Déterminants

2.1 Définition et développements

A toute matrice **carrée** A, on peut associer un nombre réel, positif, négatif ou nul appelé **déterminant de la matrice** A et noté **|**A**|**.
Il représente le **volume orienté du parallélépipède construit sur les colonnes (ou sur les lignes) de la matrice**.
La définition et le calcul du déterminant ne sont pas faciles, le plus simple est de donner une formule de récurrence qui ramène le calcul d'un déterminant n/n à celui d'un déterminant $n-1/n-1$.

n = 1

$$det[a_{11}] = a_{11}$$

n = 2

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

n = 3

$$det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

On dit qu'on a développé le déterminant selon la première ligne.

On peut aussi le développer selon une autre ligne ou selon une colonne, par exemple, selon la 2^{eme} ligne:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

En développant, on trouve la **règle de Sarrus** de calcul des déterminants $3/3$ et $2/2$:

”**somme des produits des diagonales ↘ moins somme des produits des diagonales ↙**”

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

n = 4

Pour simplifier l'écriture, introduisons quelques notations:

- A_{ij} = **sous-matrice** de A obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.
  Si A est une matrice n/n, alors A_{ij} est une matrice $n-1/n-1$.
- Le **mineur** de l'élément a_{ij} est le déterminant de la sous-matrice $|A_{ij}|$.
- Le **cofacteur** de l'élément a_{ij} est le mineur signé

$$\mathrm{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

Le signe $(-1)^{i+j}$ se retrouve ainsi:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Un déterminant $4/4$ se calcule par un développement selon une ligne ou une colonne.

Exemple 1

Développons le déterminant $4/4$ *selon les première et seconde lignes et selon la quatrième colonne:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| - a_{14}|A_{14}| =$$

$$-a_{21}|A_{21}| + a_{22}|A_{22}| - a_{23}|A_{23}| + a_{24}|A_{24}| = -a_{14}|A_{14}| + a_{24}|A_{24}| - a_{34}|A_{34}| + a_{44}|A_{44}|$$

En abrégé:
Le développement selon la ligne i ou la colonne j s'écrit:

$$|A| = \sum_k a_{ik} \cdot \mathrm{cof}(a_{ik}) = \sum_k a_{kj} \cdot \mathrm{cof}(a_{kj})$$

Il y a 8 manières de développer un déterminant $4/4$ et $2n$ manières pour un déterminant n/n.

On admettra que chaque développement donne la même valeur:

La valeur du déterminant est indépendante du choix du développement

Le calcul d'un déterminant 4/4 par cette méthode nécessite le calcul de 4 déterminants 3/3, on arrive à 40 multiplications. Pour un déterminant 5/5, 205 multiplications sont nécessaires! Pour un déterminant n/n, le nombre de multiplications $f(n)$ est de l'ordre de $n!$. ($f(n) = nf(n-1) + n$)

La méthode de Gauss est beaucoup plus rapide, elle consiste à manipuler le déterminant pour rendre la matrice triangulaire, le nombre de multiplications est alors de l'ordre de $n^3/3$.

2.2 Propriétés des déterminants

1. Le déterminant de la transposée de A est égal à celui de A:

$$\boldsymbol{|A^t| = |A|}$$

   Ainsi

   "Tout ce qui est valable pour les lignes l'est aussi pour les colonnes"

2. La permutation de deux lignes multiplie le déterminant par -1.
3. Multiplier une ligne par k multiplie le déterminant par k.
4. Multiplier la matrice par k multiplie le déterminant par k^n.
5. **Si une ligne est combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul**. En particulier, si deux lignes sont proportionnelles, le déterminant est nul.
6. On ne change pas le déterminant en ajoutant à une ligne un multiple d'une autre ligne.
7. Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit de leurs déterminants:

$$\boldsymbol{|AB| = |A||B|}$$

8. Le déterminant de la somme de deux matrices n'est pas égal à la somme de leurs déterminants:

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

9. Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est le produit des éléments diagonaux.

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

10. Le déterminant de l'inverse d'une matrice inversible est égal à l'inverse de son déterminant:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

2.3 Simplification des déterminants

Un déterminant ne change pas si on ajoute à une ligne un multiple d'une autre ligne. En utilisant cette propriété on arrive à une
Méthode de simplification:
Combiner judicieusement lignes et colonnes pour faire apparaître une ligne ou colonne ayant un maximum de zéros, puis développer selon cette ligne ou colonne.

Exemple 2
Le déterminant suivant se calcule en ajoutant la ligne 2 *aux lignes* 1 *et* 4, *puis en développant selon la colonne* 1*:*

$$\begin{vmatrix} x & 1-x & 2-x & 3-x \\ -x & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1-x \\ x & 0 & x & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3-x & 3-x \\ -x & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1-x \\ 0 & x & x+1 & 2-x \end{vmatrix} = -(-x)\begin{vmatrix} 1 & 3-x & 3-x \\ 1 & x & 1-x \\ x & x+1 & 2-x \end{vmatrix}$$

Ce dernier peut se calculer par Sarrus.

2.4 Formule de Cramer pour les systèmes carrés

Soit $AX = W$ un système carré de n équations à n inconnues.

Notons D_i le déterminant obtenu en remplaçant la colonne i de $|A|$ par W.
Ce sont les **déterminants caractéristiques** du système.

La résolution du système $AX = W$ conduit à trois possibilités:

1. $\boldsymbol{|A| \neq 0}$. Le système admet une **solution unique**: La i^{eme} inconnue est donnée par

$$\boldsymbol{x_i = \frac{D_i}{|A|}} \tag{4}$$

2. $\boldsymbol{|A| = 0}$

   2a. **Tous les $\boldsymbol{D_i = 0}$**: Le système est **indéterminé** (**infinité de solutions**) ou **impossible**.

   2b. **Un des $\boldsymbol{D_i \neq 0}$**: Le système est **impossible**.

Exemple 3
Système 2/2:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & w_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & w_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} w_1 & a_{12} \\ w_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & w_1 \\ a_{21} & w_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Exemple 4
Système 3/3:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & w_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & w_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & w_3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} w_1 & a_{12} & a_{13} \\ w_2 & a_{22} & a_{23} \\ w_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & w_1 & a_{13} \\ a_{21} & w_2 & a_{23} \\ a_{31} & w_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & w_2 \\ a_{31} & a_{32} & w_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Si le membre de droite W est nul, le système est dit **homogène**.

Si $|A| \neq 0$**, le système homogène** $AX = 0$ **ne possède que la solution** $X = 0$.

2.5 Calcul de la matrice inverse par les déterminants

La **matrice des cofacteurs** $\tilde{A}$ admet pour coefficients, les cofacteurs des coefficients de A:

$$(\tilde{A})_{ij} = \mathrm{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \tag{5}$$

On peut démontrer que la matrice inverse est donnée par:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\tilde{A}^t} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} \text{ existe } \boldsymbol{\Longleftrightarrow |A| \neq 0} \tag{7}$$

Comme on peut le voir, cette méthode de calcul de la matrice inverse est très longue et ne se pratique que pour les matrices de dimensions 2 ou 3.

Exemple 5

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \tilde{A}^t = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Exemple 6

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

3 Résolution d'un système linéaire de m équations à n inconnues

3.1 Rang d'une matrice, nombre de degrés de liberté d'un système

Soit A est une matrice à m lignes et n colonnes et $AX = W$ un système de m équations à n inconnues.

On définit le **rang** r de la matrice A comme étant la dimension du plus grand déterminant non nul qu'on peut extraire de A. [2]

On peut établir que

- Le rang est égal au nombre de colonnes indépendantes de A.

  C'est donc le nombre d'inconnues indépendantes, les $n-r$ autres sont indéterminées, elles peuvent être choisies arbitrairement.

  $n - r$ est le **nombre de degrés de liberté** du système.

- Le rang donne aussi le nombre de lignes indépendantes de A.

  Cette dernière propriété justifie la considération de la **matrice augmentée** A^{aug} obtenue en ajoutant W comme colonne supplémentaire à A.

  r^{aug} est donc le nombre d'équations indépendantes, les $m - r^{aug}$ autres sont superflues.

  On a $r^{aug} = r$ ou $r^{aug} = r + 1$.

Le rang de A est nécessairement inférieur au nombre d'équations m et au nombre d'inconnues n, donc

$$r \leq min(m, n) \text{ et } r^{aug} \leq min(m, n + 1)$$

Le calcul du rang peut se faire avec la méthode de Gauss, mais nous ne la présenterons pas dans ce cours.

3.2 Résolution du système

On peut résumer la discussion ainsi:

1. $\boldsymbol{r^{aug} = r + 1}$ **⇔ système impossible**
2. $\boldsymbol{r^{aug} = r}$ **⇔ système avec** $\boldsymbol{n - r}$ **degrés de liberté**

Cas particuliers:

1. Si $\mathbf{r} = \mathbf{m}$, alors $m \leq n$ et on est dans le cas 2 avec $n - m$ degrés de liberté.
2. Si $\mathbf{r} = \mathbf{n}$ et $\mathbf{r^{aug}} = \mathbf{r}$, alors le système admet une solution unique.
3. Si $\mathbf{n} = \mathbf{m}$:

   Pour un système carré, les conditions suivantes sont équivalentes:

   ▹ Le système admet une solution unique $X = A^{-1}W$

   ▹ $r = n$

   ▹ $|A| \neq 0$

   ▹ A est inversible

[2] Dans Mathematica, le rang peut se définir par la commande suivante:
rang[matrice_] := Last[Dimensions[matrice] - Length[Nullspace[matrice]].
Le "Nullspace" d'une matrice est le nombre de valeurs propres nulles.

4. Systèmes **homogènes AX = 0**

   Il possède toujours la solution nulle.[3]

5. **Systèmes homogènes carrés** $AX = 0$

   Les conditions suivantes sont équivalentes:

   ▹ Le système admet des solutions non nulles

   ▹ $r < n$

   ▹ $|A| = 0$

   ▹ A n'est pas inversible

6. **Principe de superposition**

   Soit X_1 une solution du système $AX = W_1$ et X_2 une solution du système $AX = W_2$ alors $X_1 + X_2$ est une solution du système $AX = W_1 + W_2$

$$\left\{\begin{array}{rcr} AX_1 & = & W_1 \\ AX_2 & = & W_2 \\ & \Rightarrow & \\ A(X_1 + X_2) & = & W_1 + W_2 \end{array}\right\}$$

Exemple 7

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 7 \end{array}\right\}$$

Ici $m = n = r = r^{aug} = 3$. Le nombre de degrés de liberté est 0. Le système possède une solution unique.

Exemple 8

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = & 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 2x_5 & = & 1 \end{array}\right\}$$

Ici $m = r = r^{aug} = 3, n = 5$. Le nombre de degrés de liberté est 2. Le système est indéterminé, deux inconnues peuvent être choisies arbitrement.
Attention: a priori on ne sait pas lesquelles!

Exemple 9

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x_1 + x_2 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 & = & 4 \\ 5x_1 + 2x_2 & = & 6 \\ 8x_1 + 3x_2 & = & 7 \\ 10x_1 + 4x_2 & = & 8 \end{array}\right\}$$

Ici $r = n = 2, m = 5, r^{aug} = 3$. Le système est impossible. On voit par exemple que la somme des deux premières équations donne la troisième pour les membres de gauche, mais pas pour les membres de droite. Cela se traduit par $r^{aug} \neq r$.

[3] Evidemment $r^{aug} = r$.

4 Algorithme de Gauss-Jordan

4.1 Résolution d'un système d'équations linéaires

Soit A est une matrice à m lignes et n colonnes.
L'algorithme de Gauss permet de mettre le système d'équations sous une forme dite **échelonnée**.

Le principe est le suivant (méthode de résolution par combinaisons linéaires): On remplace à chaque étape le système par un système équivalent obtenu par une des **opérations élémentaires** suivantes:

(I) Echanger deux lignes (permuter deux équations).

(II) Additionner à une ligne un multiple d'une autre ligne.

(III) Multiplier une ligne par un nombre non nul.

Exemple 10
Sur le système de 3 équations à 3 inconnues ci-dessous, effectuons les opérations suivantes:
Multiplier la ligne (II) par -3.
Ajouter à la ligne (II), 2 fois la ligne (I).

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 5 \\ - x_2 - 7x_3 & = & -5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 7 \end{array}\right\}$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

On enchaîne par:
Multiplier la ligne (III) par -3.
Ajouter à la ligne (III) la ligne (I).

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -8 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -16 \end{bmatrix}$$

On dit qu'on a **pivoté** *sur le premier élément* (3) *de la première colonne, c'est lui qui nous a permis de mettre des zéros dans la première colonne.*

On fait de même en pivotant sur le deuxième élément (-1) *de la deuxième colonne :*

Ajouter à la ligne (III), -8 fois la ligne (II).
Ajouter la ligne (II) à la ligne (I).

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -8 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 54 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Finalement, on divise la ligne (III) par 54 et on pivote sur le 1 de la ligne (III).
On ajoute à la ligne (II) 7 fois la ligne (III).
On ajoute à la ligne (I) 3 fois la ligne (III).

On multiplie la ligne (II) par -1.
On divise la ligne (I) par 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/9 \\ 17/9 \\ 4/9 \end{bmatrix}$$

L'algorithme se termine ici. Le rang est 3, le nombre de degrés de liberté est 0. La solution est :

$$x_1 = \frac{4}{9} \qquad x_2 = \frac{17}{9} \qquad x_3 = \frac{4}{9}$$

On peut alléger les notations en oubliant le vecteur des inconnues et en collant le vecteur de droite à la matrice de gauche, on obtient la **matrice augmentée** du système, et il suffit d'effectuer les opérations élémentaires sur celle-ci.

On peut aussi remarquer qu'on a évité l'apparition de fractions en multipliant judicieusement les lignes.

Exemple 11
Donnons les matrices augmentées:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -10 & -8 & -9 & -1 \\ 0 & -1 & -10 & 4 & 21 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 10 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

- *La dernière équation*
$$x_4 + \frac{5}{2}x_5 = \frac{1}{4}$$
signifie qu'on peut choisir la valeur de l'inconnue x_5, celle de x_4 étant alors déterminée;
- *La seconde équation*
$$x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 1$$
nous permet de choisir x_3 et détermine x_2;
- *x_1 est finalement déterminée par la première équation*
$$x_1 - 3x_3 + 3x_5 = \frac{1}{2}$$

Le système est indéterminé, avec **deux degrés de liberté** *(2 paramètres à choix).*

Appelons-les $\beta = x_5$ et $\alpha = x_3$.

L'espace des solutions est de dimension 2, il s'exprime ainsi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \\ -5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le nombre de lignes non nulles de la matrice réduite est le rang du système, ici il vaut trois.

On peut remarquer que:

Nombre de degrés de liberté = nombre d'inconnues - rang

Exemple 12

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 7 \\ 10 & 4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & -13 \\ 0 & -1 & -13 \\ 0 & -2 & -14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Les trois dernières "équations" indiquent que le système est impossible. Le rang est deux.

Exemple 13

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & a \\ 8 & 3 & b \\ 10 & 4 & c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 15-3a \\ 0 & 0 & 18-3b \\ 0 & 0 & 30-3c \end{bmatrix}$$

Le système admet une solution si les trois conditions $15-3a=0, 18-3b=0, 30-3c=0$ *sont satisfaites et dans ce cas il admet une solution unique.*

Exemple 14

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5x_1 & - & 10x_2 & + & 5x_3 & + & 11x_4 & + & 18x_5 & = & 8 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\ 7x_1 & - & 14x_2 & + & 8x_3 & + & 14x_4 & + & 21x_5 & = & 8 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & + & 18x_5 & = & 16 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 5 & -10 & 5 & 11 & 18 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & -14 & 8 & 14 & 21 & 8 \\ 3 & -6 & 7 & 9 & 18 & 16 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -10 & 5 & 11 & 18 & 8 \\ 7 & -14 & 8 & 14 & 21 & 8 \\ 3 & -6 & 7 & 9 & 18 & 16 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

L'algorithme se termine ici.
Les inconnues x_1, x_3, x_4 *sont principales et* $x_2 = \alpha, x_5 = \beta$ *sont secondaires, le rang de la matrice du système est trois, celui de la matrice augmentée aussi.*
L'espace des solutions est de dimension deux. On peut le paramétrer ainsi:

$$\left\{\begin{array}{rclcccrcrcrcr} x_1 & = & -6 & + & 2x_2 & + & 3x_5 & = & -6 & + & 2\alpha & + & 3\beta \\ x_3 & = & 1 & & & & & = & 1 & & & & \\ x_4 & = & 3 & & & - & 3x_5 & = & 3 & & & - & 3\beta \end{array}\right\}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 15

Avec un second membre paramétrique

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 5\,x_1 & - & 10\,x_2 & + & 5\,x_3 & + & 11\,x_4 & + & 18\,x_5 & = & w_1 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & + & 2\,x_4 & + & 3\,x_5 & = & w_2 \\ 7\,x_1 & - & 14\,x_2 & + & 8\,x_3 & + & 14\,x_4 & + & 21\,x_5 & = & w_3 \\ 3\,x_1 & - & 6\,x_2 & + & 7\,x_3 & + & 9\,x_4 & + & 18\,x_5 & = & w_4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 5 & -10 & 5 & 11 & 18 & w_1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & w_2 \\ 7 & -14 & 8 & 14 & 21 & w_3 \\ 3 & -6 & 7 & 9 & 18 & w_4 \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & w_2 \\ 5 & -10 & 5 & 11 & 18 & w_1 \\ 7 & -14 & 8 & 14 & 21 & w_3 \\ 3 & -6 & 7 & 9 & 18 & w_4 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & w_1 - 5w_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w_3 - 7w_2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 9 & w_4 - 3w_2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w_3 - 7w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & w_1 - 5w_2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 9 & w_4 - 3w_2 \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w_3 - 7w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & w_1 - 5w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_4 - 4w_3 + 40w_2 - 3w_1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & -3 & -2w_1 + 18w_2 - w_3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & w_3 - 7w_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & w_1 - 5w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_4 - 4w_3 + 40w_2 - 3w_1 \end{array} \right]$$

Deux cas sont à considérer selon que le terme $w_4 - 4w_3 + 40w_2 - 3w_1$ *est nul ou non.*

- $w_4 - 4w_3 + 40w_2 - 3w_1 \neq 0$

  Le système n'a aucune solution, le rang de la matrice augmentée est quatre, celui de la matrice du système étant de trois.

- $w_4 - 4w_3 + 40w_2 - 3w_1 = 0$, *on procède comme dans l'exemple précédent:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2w_1 + 18w_2 - w_3 \\ 0 \\ w_3 - 7w_2 \\ w_1 - 5w_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Calcul de la matrice inverse d'un système carré inversible

On peut vérifier que chacune des opérations élémentaires revient à **prémultiplier** la matrice du système par une **matrice élémentaire**.

(I) Echanger les lignes i et j équivaut à prémultiplier par la matrice $L_{i,j}$.

$$\text{Exemple: } L_{2,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(II) Additionner à la ligne i, λ fois ligne j équivaut à prémultiplier par la matrice $A_{i,j,\lambda}$.

$$\text{Exemple: } A_{4,2,\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(III) Multiplier la ligne i par λ équivaut à prémultiplier par la matrice $M_{i,\lambda}$.

$$\text{Exemple: } M_{2,\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, en notant B la matrice du système, on peut résumer les calculs précédents par

$$I = \cdots A_{3,2,-8} \cdot A_{3,1,1} M_{3,-3} \cdot A_{2,1,2} \cdot M_{2,-3} \cdot B$$

ou

$$I = L \cdot B$$

Ainsi, L est la matrice inverse B^{-1} de B.

Ce qui permet d'utiliser l'algorithme pour calculer l'inverse d'une matrice carrée.
Elle existe si tous les éléments diagonaux de la matrice réduite sont non nuls.

On effectue toutes les opérations élémentaires sur la matrice I.
On dispose les éléments ainsi:

$$\begin{array}{|c|c|} B & I \\ \hline I & B^{-1} \end{array}$$

Exemple 16

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 13 & -10 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \\ -5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

4.3 Calcul du déterminant d'une matrice carrée

On peut également utiliser l'algorithme de Gauss pour calculer un déterminant.
Il suffit de retenir que les opérations

- (I) change le signe du déterminant
- (III) ne le change pas
- (II) le multiplie par le scalaire correspondant.

On arrêtera alors l'algorithme lorsque la matrice est triangulaire.

Ainsi, dans le premier exemple, on avait obtenu la matrice suivante:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 54 \end{bmatrix}$$

dont le déterminant est le produit des éléments diagonaux $3 \cdot (-1) \cdot 54 = -162$.

Le déterminant de la matrice B de départ est

$$-18 = \frac{-162}{9}$$

Cela provient de l'utilisation de deux opérations du type (II) qui ont multiplié le déterminant par $3 \cdot 3 = 9$.

Exemple 17

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \overset{L_{2,3}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

5 Exercices

5.1 Exercices sur les matrices

Exercice 1
Ecrire sous forme matricielle les systèmes suivants:

1.
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - \;\; x_3 & = & 2 \end{array}\right\}$$

2.
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & = & 1 \\ 3x_1 + 2x_2 & = & 2 \\ x_1 - 5x_2 & = & 3 \end{array}\right\}$$

Exercice 2
Ecrire sous forme de systèmes les équations matricielles suivantes:

1.
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 3 \\ 2 & -1 \\ 2 & -5 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3.
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Exercice 3
Soient les deux vecteurs

$$V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ et } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

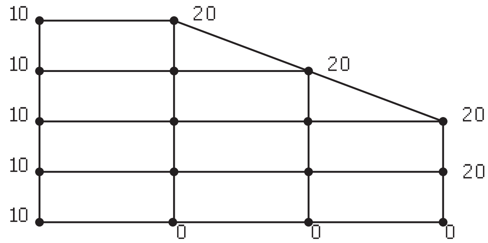
1. *Déterminer une matrice A telle que $AX = V \cdot X$ (produit scalaire).*

2. *Déterminer une matrice B telle que $BX = V \wedge X$ (produit vectoriel).*

Exercice 4
Transposer les matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 5
En chaque noeud du réseau, la température est la moyenne arithmétique des températures des quatre noeuds voisins. Ecrire le système d'équations qui permet de calculer ces températures.
Mettre celui-ci sous forme matricielle.



Exercice 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Calculer, s'ils sont définis, les produits AB, BA, BA^t, AC, BC, C^tC, CC^t, C^tA^t, CB.

Exercice 7
Calculer les produits suivants:

1.
$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 8
Prouver que C^tC *et* CC^t *sont des matrices symétriques, quel que soit la matrice* C.

5.2 Exercices sur les déterminants

Exercice 9
Calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 10
Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 11
Résoudre

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 12
Prouver l'identité suivante:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Exercice 13
Prouver que le polynôme p(x) s'annule en x = 0 (Sans calculer le déterminant!).

$$p(x) = \begin{vmatrix} x+a & x & a-1 & a \\ x+b & x+1 & b+1 & b+1 \\ x+c & x+2 & c-2 & c+2 \\ x+d & x+3 & d+2 & d+3 \end{vmatrix}$$

5.3 Exercices sur les matrices inverses

Exercice 14
Déterminer les matrices inverses des matrices suivantes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 15
Calculer l'inverse de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vérifier le résultat en calculant le produit AA^{-1}.
Vérifier aussi que

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$$

5.4 Exercices sur l'algorithme de Gauss-Jordan

Exercice 16
Mettre le système suivant sous forme de matrice augmentée et opérer la réduction de Gauss-Jordan pour mettre la matrice sous forme échelonnée réduite. En déduire l'espace des solutions.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 3 \end{array} \right\}$$

Exercice 17
Même exercice avec le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2+2x_3+x_4 & = & 1 \\ 3x_1-x_2+x_3+2x_4 & = & 2 \end{array}\right\}$$

Exercice 18
Même exercice avec le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1+x_2+4x_3+5x_4 & = & 1 \\ 2x_1+x_2+5x_3+5x_4 & = & 2 \\ x_1+3x_2+2x_3+7x_4 & = & 3 \end{array}\right\}$$

Exercice 19
Même exercice avec le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1+3x_2+4x_3 & = & 5 \\ 2x_1+2x_2+5x_3 & = & 5 \\ x_1+3x_2+2x_3 & = & 7 \end{array}\right\}$$

Exercice 20
Même exercice avec le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1+x_2+4x_3+5x_4 & = & 1 \\ 2x_1+x_2+5x_3+5x_4 & = & 2 \\ 5x_1+2x_2+9x_3+10x_4 & = & 3 \end{array}\right\}$$

Exercice 21
Même exercice avec le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1+x_2+4x_3+5x_4 & = & 1 \\ 2x_1+x_2+5x_3+5x_4 & = & 2 \\ 5x_1+2x_2+9x_3+10x_4 & = & \mathbf{4} \end{array}\right\}$$

Exercice 22
Même exercice avec le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1+x_2+4x_3+5x_4 & = & \boldsymbol{a} \\ 2x_1+x_2+5x_3+5x_4 & = & \boldsymbol{b} \\ 5x_1+2x_2+9x_3+10x_4 & = & \boldsymbol{c} \end{array}\right\}$$

Discuter de l'existence de solutions en fonction des paramètres a, b, c.

Exercice 23
En utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, inverser et calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 24
Même exercice avec la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercice 25

Même exercice avec la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6 Corrigés

Corrigé ex 1

- $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 2

1.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 & = & 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 & = & 3 \end{array} \right\}$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & = & 1 \\ -4x_1 + 3x_2 & = & 2 \\ 2x_1 - x_2 & = & 3 \\ 2x_1 - 5x_2 & = & 4 \\ -3x_1 + 4x_2 & = & 5 \\ 5x_1 + 6x_2 & = & 6 \end{array} \right\}$$

3.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 & = & 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 & = & 3 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 & = & 4 \end{array} \right\}$$

Corrigé ex 3

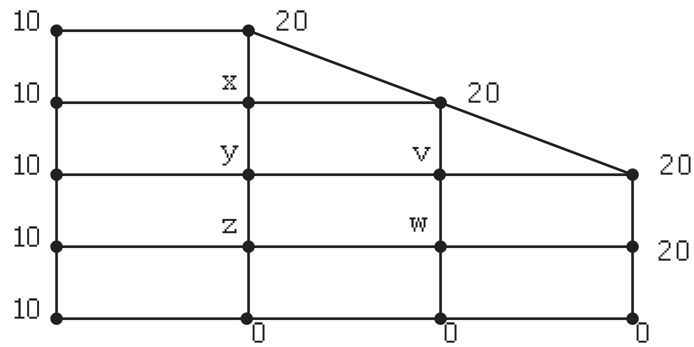
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 5

Plaçons les inconnues aux noeuds centraux du réseau. On obtient 5 équations linéaires.



$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{10+20+20+y}{4} \\ y & = & \frac{x+10+v+z}{4} \\ z & = & \frac{y+10+w+0}{4} \\ v & = & \frac{20+y+w+20}{4} \\ w & = & \frac{v+z+0+20}{4} \end{array}\right.$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \\ 10 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 6

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix},\ BA^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},\ AC = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix},\ BC = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},\ C^tC = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$$

$$CC^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ C^tA^t = \begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix}$$

BA et CB ne sont pas définis.

Corrigé ex 7

1. *Les deux produits donnent le même résultat:*

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$$

2. *Le premier produit donne la matrice nulle, le second vaut*

$$\begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 8
Il faut prouver que

$$(C^tC)^t = (C^tC)$$

et

$$(CC^t)^t = (CC^t)$$

Mais

$$(C^tC)^t = C^t(C^t)^t = C^tC$$

De même pour la seconde égalité.

Corrigé ex 9
On trouve -12, 12, -48 et 29.

Corrigé ex 10
On trouve 0.

Corrigé ex 11
On trouve 1.

Corrigé ex 12
Preuve I
Posons

$$D(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

D(a, b, c, d) est un polynôme de degré 2 *en* a, b, c *et de degré* 1 *en* d*, comme on peut le constater en regardant le développement selon la première colonne, on voit aussi que "a" est en évidence.*
De plus:
En posant $a = b$ *le polynôme* $D(a)$ *s'annule, donc il est divisible par* $(a - b)$*.*
En posant $b = c$ *le polynôme* $D(b)$ *s'annule, donc il est divisible par* $(b - c)$*.*
En posant $c = d$ *le polynôme* $D(c)$ *s'annule, donc il est divisible par* $(c - d)$*.*

Ainsi $D(a,b,c,d)$ *est divisible par* $a(a - b)(b - c)(c - d)$*.*
Comme les degrés se correspondent, il ne peut plus venir qu'une constante numérique k *en facteur.*

$$D(a,b,c,d) = ka(a - b)(b - c)(c - d)$$

Que vaut k*?*
L'identité doit être vérifiée quels que soient a, b, c, d*, choisissons* $a = 1, b = 0, c = 2$ *et* $d = 3$*, on trouve d'une part* $D(1,0,2,3) = 2$ *(en calculant directement), d'autre part* $D(1,0,2,3) = k(1-0)(0-2)(2-3) = 2k$*, donc* $k = -1$*, et ainsi*

$$D(a,b,c,d) = a(b - a)(b - c)(c - d)$$

Preuve II
On soustrait la ligne III à la ligne IV, puis la ligne II à la ligne III et enfin la ligne I à la ligne II.
La matrice est alors triangulaire!
Son déterminant est le produit des éléments diagonaux.

Corrigé ex 13
Lorsque $x = 0$*, la colonne 4 est la somme de la colonne 1 et de la colonne 2, donc le déterminant est nul.*

Corrigé ex 14

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 15

$$\frac{1}{929}\begin{bmatrix} 107 & 138 & -85 & -6 \\ 86 & -28 & -77 & 82 \\ -94 & 9 & 257 & 40 \\ -145 & 4 & 11 & 121 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 16
La matrice augmentée est

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Les étapes de l'algorithme de Gauss-Jordan sont les suivantes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -22 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 11 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 54 & 54 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -594 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 54 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ce qui se traduit par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Ainsi le système a une solution unique, autrement dit, l'espace des solutions est de dimension 0, c'est un **point** *dans* $\mathbb{R}^3$.

Il n'y a aucun degré de liberté, la matrice du système est inversible, le système est de Cramer, le rang est égal au nombre d'inconnues, c'est-à-dire 3.

Corrigé ex 17
Les étapes de l'algorithme de Gauss-Jordan sont les suivantes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -22 & 0 & -10 & -14 & -14 \\ 0 & 11 & 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{7}{11} & \frac{7}{11} \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + \frac{5}{11}x_3 + \frac{7}{11}x_4 & = & \frac{7}{11} \\ x_2 + \frac{4}{11}x_3 - \frac{1}{11}x_4 & = & -\frac{1}{11} \end{array} \right\}$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{5}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 + \frac{7}{11} \\ x_2 & = & -\frac{4}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 - \frac{1}{11} \end{array} \right\}$$

ce qui s'écrit sous forme vectorielle

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} \\ -\frac{1}{11} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -\frac{5}{11} \\ -\frac{4}{11} \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -\frac{7}{11} \\ \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Cette façon d'écrire est correcte, mais elle s'interprète mal géométriquement.

Les solutions sont des quadrivecteurs (dimension 4) et on préfère les noter ainsi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} \\ -\frac{1}{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{5}{11} \\ -\frac{4}{11} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -\frac{7}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ, μ *étant deux paramètres réels quelconque.*

Ce qui signifie que les inconnues x_3, x_4 *peuvent être choisies arbitrairement et qu'alors,* x_1, x_2 *sont déterminées.*
L'espace des solutions est de dimension deux, il y a deux degrés de liberté, le rang est deux.

L'espace des solutions est un **plan** *de l'espace* $\mathbb{R}^4$*, passant par le point* $\left(\frac{7}{11}, -\frac{1}{11}, 0, 0\right)$.

Corrigé ex 18

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 & = & 3 \end{array} \right\}$$

Les étapes de l'algorithme de Gauss-Jordan sont les suivantes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & -4 \\ 0 & -8 & -2 & -16 & -8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 54 & 24 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 54 & 0 & 0 & 24 & -30 \\ 0 & -54 & 0 & -102 & -48 \\ 0 & 0 & 54 & 24 & 24 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & -9 & 0 & -17 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{9} & \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Les solutions sont des quadrivecteurs:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{17}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ *est un paramètre réel quelconque.*

Ce qui signifie que l'inconnue x_4 peut être choisie arbitrairement et qu'alors, x_1, x_2, x_3 sont déterminées. L'espace des solutions est de dimension un, il y a un degré de liberté, le rang est trois.

L'espace des solutions est une **droite** *de l'espace $\mathbb{R}^4$, passant par le point $\left(-\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{4}{9}, 0\right)$.*

Corrigé ex 19
Dans ce cas, on devra permuter deux lignes.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & -6 & -2 & -16 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -6 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & -2 & -16 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -42 & 0 & 0 & 72 \\ 0 & -42 & 0 & -102 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & -7 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{12}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

Le système a une solution unique, l'espace des solutions est de dimension 0, c'est un **point** *dans $\mathbb{R}^3$.*

Il n'y a aucun degré de liberté, la matrice du système est inversible, le système est de Cramer, le rang est égal au nombre d'inconnues, c'est-à-dire 3.

Corrigé ex 20

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 9 & 10 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi la dernière équation est inutile, elle est toujours satisfaite.

Les solutions sont des quadrivecteurs (dimension 4):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ, μ sont deux paramètres réels quelconque.

Les inconnues x_3, x_4 peuvent être choisies arbitrairement et alors, x_1, x_2 sont déterminées. L'espace des solutions est de dimension deux, il y a deux degrés de liberté, le rang est deux.

L'espace des solutions est un **plan** *de l'espace $\mathbb{R}^4$, passant par le point $(-1, 4, 0, 0)$. Comme on le voit, le nombre de degrés de liberté (c'est-à-dire la dimension de l'espace de solutions) n'est pas nécessairement égal au nombre d'inconnues moins le nombre d'équations, car certaines équations peuvent être redondantes ou inutiles. Le rang donne le nombre d'équation utiles.*

Corrigé ex 21

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 9 & 10 & \mathbf{4} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & \mathbf{-7} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$$

Ainsi la dernière équation est impossible, elle n'est jamais satisfaite.

Il n'y pas de solutions.
L'espace des solutions est de dimension nulle, il y a zéro degré de liberté, le rang est deux.

Corrigé ex 22

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & \boldsymbol{a} \\ 2 & 1 & 5 & 5 & \boldsymbol{b} \\ 5 & 2 & 9 & 10 & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & \boldsymbol{a} \\ 0 & -1 & -7 & -5 & \boldsymbol{2a-3b} \\ 0 & -1 & -7 & -5 & \boldsymbol{5a-3c} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & \boldsymbol{-3a+3b} \\ 0 & -1 & -7 & -5 & 2a-3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{3a+3b-3c} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \boldsymbol{a-b} \\ 0 & 1 & 7 & 5 & -2a+3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{a+b-c} \end{bmatrix}$$

Ainsi la dernière équation est satisfaite si et seulement si $c = a + b$.

Et dans ce cas, l'espace des solutions est de dimension deux, il y a deux degrés de liberté, le rang est deux.

Corrigé ex 23
La matrice augmentée et les étapes de l'algorithme donnent:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -22 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 11 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

et la matrice inverse est donc

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

Le déterminant est -11.

Corrigé ex 24

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -22 & 0 & -14 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & -8 & -2 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -594 & 0 & 0 & -110 & -176 & 154 \\ 0 & 594 & 0 & 154 & -110 & 22 \\ 0 & 0 & 54 & -8 & -2 & 22 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{27} & \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{1}{27} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} \end{bmatrix}$$

et la matrice inverse est donc

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{27} & \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} \\ \frac{7}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{1}{27} \\ -\frac{4}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} \end{bmatrix}$$

Le déterminant est -27.

Corrigé ex 25

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -22 & 0 & -14 & -2 & -2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -30 & 3 & -2 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 3 & -2 & 0 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -132 & 0 & 0 & 198 & -33 & -22 & 77 & 0 \\ 0 & 132 & 0 & 66 & 33 & -22 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -30 & 3 & -2 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -66 & 33 & -22 & 11 & -132 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 132 & 0 & 0 & 0 & -66 & 88 & -110 & 396 \\ 0 & -132 & 0 & 0 & -66 & 44 & -22 & 132 \\ 0 & 0 & -132 & 0 & -132 & 88 & -176 & 660 \\ 0 & 0 & 0 & -66 & 33 & -22 & 11 & -132 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 2 \end{bmatrix}$$

et la matrice inverse est donc

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -5 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 2 \end{bmatrix}$$

Le déterminant est -6.