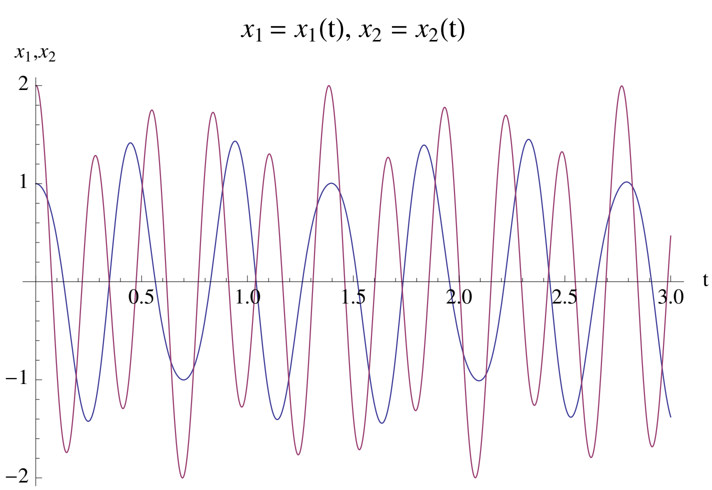
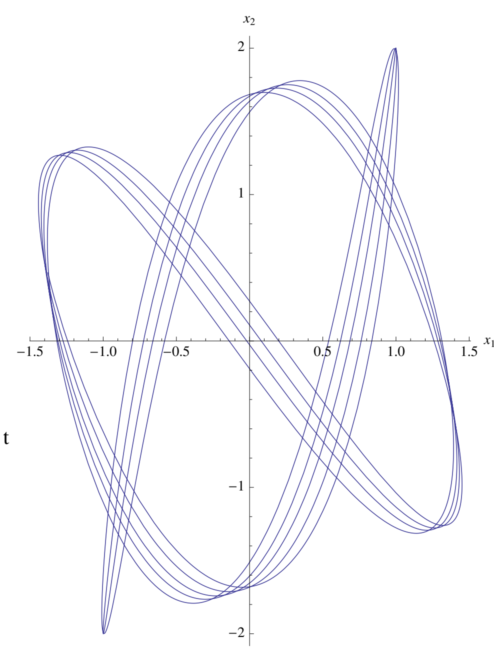
heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

# Algèbre linéaire II

Version 2012

Lang Fred



# Table des matières

# 1 Transformations linéaires

## 1.1 Définition

Une transformation $f$ d'un espace vectoriel est **linéaire** si elle vérifie pour toutes les valeurs des variables

$$f(\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}) = \alpha\, f(\vec{a}) + \beta\, f(\vec{b}) \tag{1}$$

Une transformation linéaire est alors entièrement déterminée par sa valeur sur les vecteurs d'une base:

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = f(v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}) = v_1\, f(\vec{i}) + v_2\, f(\vec{j}) + v_3\, f(\vec{k}) \tag{2}$$

On peut ainsi lui associer une matrice $F$ dont les colonnes sont les vecteurs-colonnes de $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$.

Appelons $V$ et $W$ les vecteurs-colonnes de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Alors

$$\vec{w} = f(\vec{v}) \Leftrightarrow W = FV \tag{3}$$

**Une transformation linéaire $f$ est inversible si et seulement si le déterminant de $F$ n'est pas nul**.

## 1.2 Exemples de transformations linéaires en dimension 2

Les symétries axiales d'axes $Ox$, $Oy$, $y = x$, $y = -x$ sont représentées par les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La symétrie centrale de centre $O$ et l'homothétie de centre $O$ de rapport $\lambda$ admettent les matrices

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

La rotation de centre $O$ d'angle $\theta$ a pour matrice

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

La symétrie axiale d'axe $y = \tan(\theta)\,x$ a pour matrice

$$\begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

La projection sur l'axe $Ox$ parallèlement à l'axe $Oy$ a pour matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce sont toutes, sauf la dernière, des transformations inversibles, donc de déterminant non nul.

Les matrices de rotations $R$ sont orthogonales, car elles vérifient

$$R^{-1} = R^t$$

Leurs vecteurs-colonnes sont normés et perpendiculaires deux à deux.

Les rotations préservant les aires et l'orientation, leur déterminant vaut 1.

Les matrices des symétries axiales ont un déterminant -1. Elles préservent les aires, mais inversent l'orientation.

Le déterminant de la matrice d'une transformation linéaire est le rapport entre l'aire (volume) du domaine image et celui du domaine de départ.

## 1.3 Exemples de transformations linéaires en dimension 3

Les symétries planes de plans $Oxy$, $Oyz$, $Ozx$, $y = x$, $y = -x$ sont représentées par les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les symétries axiales d'axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ sont représentées par les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La symétrie centrale de centre $O$ et l'homothétie de centre $O$ de rapport $\lambda$ admettent les matrices

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Les rotations d'axes $Ox$, $Oy$ et $Oz$ d'angle $\theta$ ont pour matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La projection sur le plan $Oxy$ parallèlement à l'axe $Oz$ et la projection sur l'axe $Oz$ parallèlement au plan $Oxy$ ont pour matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 1.4 Rotations en dimension 3

Une rotation dans l'espace est déterminée par son axe et son angle.

Nous allons considérer une rotation d'axe passant par $O$, parallèle au vecteur unitaire $\vec{e} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, et d'angle $\theta$.

Soient

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad E^a = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \quad EE^t = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

La matrice associé à la rotation est alors

$$R = \cos(\theta)\, I + \sin(\theta)\, E^a + (1 - \cos(\theta))\, EE^t$$

## 1.5 Changement de base

Ce qui précède dépend de la base choisie, il est souvent utile de faire un changement de base (découpler un système d'équations différentielles, trouver les axes d'une ellipse,...).

Un vecteur $\vec{x}$ aura un vecteur-colonne $X$ dans la première base et un vecteur-colonne $X'$ dans la seconde.

De même, une transformation linéaire $f$ aura des matrices $A$ et $A'$.

Un changement de base est entièrement déterminé par une **matrice de changement de base** $\boldsymbol{S}$ qui doit être inversible.

On a alors

$$\boldsymbol{X = SX'} \qquad \boldsymbol{X' = S^{-1}X} \tag{4}$$

Cherchons le lien entre les matrices $A$ et $A'$ de la transformation linéaire $f$.

$$\vec{y} = f(\vec{x}) \quad \Leftrightarrow \quad Y = AX \quad \text{ou} \quad Y' = A'X'$$

Comme $Y' = S^{-1}Y$ et $X' = S^{-1}X$, en substituant on obtient $S^{-1}Y = A'S^{-1}X$, d'où

$$Y = SA'S^{-1}X = AX$$

$$\boldsymbol{A' = S^{-1}AS} \qquad \boldsymbol{A = SA'S^{-1}} \tag{5}$$

Si le changement de base est une rotation $R$, la matrice $R$ étant orthogonale, $R^{-1} = R^t$, on a

$$\boldsymbol{A' = R^tAR} \qquad \boldsymbol{A = RA'R^t} \tag{6}$$

On remarquera qu'**un changement de base ne change pas le déterminant**.
En effet:

$$|A'| = |S^{-1}AS| = |S^{-1}| \cdot |A| \cdot |S| = |S|^{-1} \cdot |A| \cdot |S| = |A|$$

La plupart des matrices des transformations linéaires précédentes sont particulièrement simples car la base est "adéquate", par exemple, pour une symétrie plane, on prend une base ayant deux vecteurs dans le plan de symétrie et un troisième perpendiculaire au plan.

Ces vecteurs sont des vecteurs propres de la transformation linéaire.

## 2 Valeurs propres et vecteurs propres

### 2.1 Définition

Un **vecteur propre** d'une matrice $M$ est un vecteur **non nul** $V$ tel que

$$\boldsymbol{MV = \lambda V} \tag{7}$$

pour un certain scalaire $\lambda$, appelé **valeur propre** de $M$.

**Exemple**: Symétrie axiale, en dimension 2:
Tous les vecteurs non nuls, parallèles à l'axe de symétrie, sont des vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 et tous les vecteurs non nuls, perpendiculaires à l'axe de symétrie, sont des vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1.

**Exemple**: Homothétie de rapport $\lambda$:
Tous les vecteurs non nuls sont des vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda$.

**Exemple**: Rotation, en dimension 2:
Les valeurs et vecteurs propres sont complexes.

**Exemple**: Symétrie plane, en dimension 3:
Tous les vecteurs non nuls, parallèles au plan de symétrie, sont des vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 et tous les vecteurs non nuls, perpendiculaires au plan de symétrie, sont des vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1.

**Exemple**: Rotation, en dimension 3:
Tous les vecteurs non nuls, parallèles à l'axe de symétrie, sont des vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1, et tous les vecteurs non nuls, perpendiculaires à l'axe de symétrie, sont des vecteurs propres complexes relatifs à des valeurs propres complexes.

**Exemple**: Numérique

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.4 \\ 1 \end{bmatrix} = 5.83 \begin{bmatrix} 2.4 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 14.07 \\ 5.83 \end{bmatrix}$$

$V_1 = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ relatif à la valeur propre $\lambda_1 \approx 5.83$.

La matrice $M$ admet deux vecteurs propres $V_1 = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $V_2 = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 1 \end{bmatrix}$ relatifs aux valeurs propres $\lambda_1 \approx 5.83$ et $\lambda_2 \approx 0.17$.

On remarquera que ces deux vecteurs sont perpendiculaires.
Nous verrons qu'ils sont parallèles aux axes de l'ellipse représentée par la matrice $M$ et que les valeurs propres permettent de calculer les demi-axes de celle-ci.

La recherche des vecteurs et valeurs propres de la matrice d'une transformation linéaire permet de déterminer les éléments géométriques caractéristiques de celle-ci.

## 2.2 Calcul des valeurs et vecteurs propres. Equation caractéristique

La recherche des valeurs propres $\lambda$ revient à trouver les $\lambda$ pour lesquels il existe des solutions $V$ non nulles du système (7).

En appelant $I$ la matrice identité, ce système peut s'écrire sous la forme

$$(\boldsymbol{M} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

C'est un système homogène, il possède des solutions $V$ non nulles si et seulement si le déterminant $|M - \lambda I|$ est nul.

$$|\boldsymbol{M} - \lambda\boldsymbol{I}| = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

Ainsi, la recherche des valeurs propres conduit à résoudre l'équation (9) de degré $n$.

$|M - \lambda I|$ est un polynôme de degré $n$ en $\lambda$, c'est le **polynôme caractéristique** de $M$.

L'équation $|M - \lambda I| = 0$ est l'**équation caractéristique** de $M$.

**$\lambda$ est valeur propre de la matrice $M$ si et seulement si $|\boldsymbol{M} - \lambda\boldsymbol{I}| = \boldsymbol{0}$.**

En général, l'équation caractéristique possède $n$ solutions complexes ou réelles et non nécessairement distinctes.
L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le **spectre** de $M$, c'est en général un ensemble de nombres complexes.

**Exemple**:
La matrice $M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ admet l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$$

qui s'annule si $\lambda \approx 5.83$ et $\lambda \approx 0.17$.

Une fois connues les valeurs propres, il faut trouver les vecteurs propres, donc résoudre, par rapport à $V$, les équations $MV = \lambda V$, pour **chaque valeur propre** $\lambda$.

Le système $MV = \lambda V$ est formé de $n$ équations à $n$ inconnues (les composantes de $V$), mais comme $|M - \lambda I| = 0$, une des équations au moins est combinaison linéaire des autres et est donc inutile, ce qui signifie qu'une des composantes de $V$ peut être choisie librement.
$V$ est ainsi défini à un multiple près.

En effet, si $V$ est vecteur propre, $kV$ l'est aussi:

$$M(kV) = k(MV) = k(\lambda V) = \lambda(kV)$$

**Exemple**:
Pour trouver le vecteur propre relatif à la valeur propre 5.83, on résout le système

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5.83\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ce système est indéterminé, on peut choisir, par exemple $y = 1$ et on trouve le vecteur

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Souvent on normalise les vecteurs propres, par exemple en imposant qu'une des composantes soit égale à 1, on en les rendant unitaires.

## 2.3 Quelques théorèmes

**Théorème 1 (Base de vecteurs propres)**
*Si $M$ est une matrice $n/n$ possédant $n$* **valeurs propres distinctes** *$\lambda_1, ..., \lambda_n$.*
*Alors*

1. *Les vecteurs propres $V_1, ..., V_n$ associés à ces valeurs propres forment une base.*
2. *En opérant le changement de base $X = SX'$, où $S = [V_1...V_n]$, la matrice $M$ devient $M' = S^{-1}MS$ diagonale et la diagonale est formée des valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de $M$.*

**Théorème 2 (Matrice symétrique)**
*Les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles.*

**Théorème 3 (Matrice diagonalisable)**
*Une matrice $M$ est diagonalisable, sil existe un changement de base $S$ telle que $M' = S^{-1}MS$ soit diagonale .*
*Le déterminant d'une matrice diagonalisable est alors le produit de ses valeurs propres.*
*Avoir des valeurs propres distinctes est suffisant, mais pas nécessaire, pour être diagonalisable.*

**Théorème 4 (Matrice orthogonale)**
*Les vecteurs propres d'une matrice orthogonale sont perpendiculaires deux à deux.*

Le théorème suivant est utilisé en mécanique vibratoire.

**Théorème 5 (Relation d'orthogonalité)**
*Soient $M$ et $K$ deux matrices symétriques inversibles telles que la matrice $A = M^{-1}K$ possède $n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n$.*
*Soit $S = [V_1...V_n]$ la matrice formée des vecteurs propres de $A$, alors $[m] = S^tMS$ et $[k] = S^tKS$ sont diagonales.*
*On a aussi $S^{-1}AS = [\lambda] = [m]^{-1}[k]$ ou $[k] = [m][\lambda]$.*

Les relations

$$S^tKS = S^tMS[\lambda]$$

sont appelées **relations d'orthogonalité**.

## 3 Réduction des coniques

### 3.1 Coniques en position générales

L'équation générale du second degré à deux variables se présente ainsi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{10}$$

Cette équation représente toujours une conique[1]: ellipse, hyperbole ou parabole, éventuellement dégénérée en une ou deux droites, un point ou une figure vide.

Elle peut se mettre sous les formes matricielles suivantes:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{12}$$

En posant

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix}$$

L'équation générale devient

$$X^t MX + 2X^t W + F = 0 \tag{13}$$

Introduisons les déterminants

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \text{ et } \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

On peut démontrer les résultats suivants: l'équation (10) représente

- une conique dégénérée $\Leftrightarrow \Delta = 0$
- une parabole non dégénérée $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$ et $\delta = 0$
- une hyperbole non dégénérée $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$ et $\delta < 0$
- une ellipse non dégénérée $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$ et $\delta > 0$
- un cercle $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$ et $B = 0$ et $A = C$

Par une rotation et une translation adéquates des axes de coordonnées, l'équation (10) peut se mettre sous la forme:

$$\lambda_1^2 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0 \tag{14}$$

avec

[1] section du cône ou du cylindre par un plan.

- Les directions des axes sont données par les vecteurs propres de la matrice $M$.
- $\lambda_1, \lambda_2$ sont les valeurs propres de $M$.
- Le déterminant de la matrice vaut $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \delta$. Donc si une des valeurs propres est nulle, la conique est une parabole.

L'angle $\theta$ entre un des axes de la conique et $Ox$ est donné par:

$$\tan(2\theta) = \frac{2B}{A - C} \tag{15}$$

## 3.2 Directions des axes d'une conique

Sous la forme (10), une conique est, en général, oblique par rapport au système d'axes.

**Exemple**:
La conique d'équation

$$5x^2 + 4yx + y^2 + 3x - 2y + 5 = 0$$

est une ellipse. (fig 1)

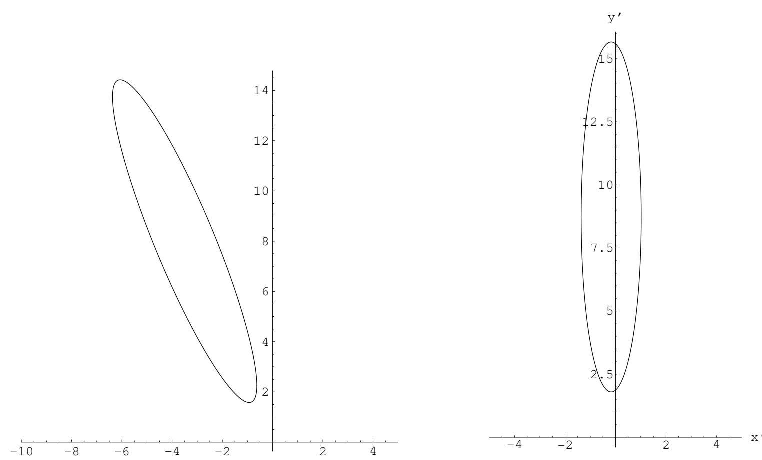



Figure 1: Ellipse oblique par rapport au repère $Oxy$. Son équation dans le repère $Oxy$ est $5x^2 + 4yx + y^2 + 3x - 2y + 5 = 0$. Dans le nouveau repère $Ox'y'$, l'équation devient $5.8x^2 + 0.17y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$

Notre objectif est d'éliminer le terme mixte $xy$ en opérant une rotation du système d'axes $Oxy$. [2]

**Exemple**:

$$5x^2 + 4yx + y^2 + 3x - 2y + 5 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 3x - 2y + 5 = 0$$

L'objectif serait rempli si la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

[2] Pour simplifier l'exposé, nous supposerons que la conique est une conique à centre: ellipse ou hyperbole.

était diagonale.

Diagonaliser $M$ revient à tourner le système d'axes $Oxy$ de sorte qu'il devienne parallèle aux axes de la conique.

**Les axes de la conique sont parallèles aux vecteurs propres de** $M$.

La matrice de rotation $R$ admet les vecteurs propres de $M$ pour vecteurs-colonnes:

$$R = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2,414 & -0,414 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans le nouveau repère $X = RX'$, la matrice $M$ devient

$$M' = R^t M R = \begin{bmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5.82843 & 0. \\ 0. & 0.171573 \end{bmatrix}$$

la conique admet la nouvelle équation sans termes mixtes:

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)x^2+3\sqrt{2}x+x+\left(3-2\sqrt{2}\right)y^2-3\sqrt{2}y+y+5 \approx 5.8284x^2+5.2426x+0.17157y^2-3.2426y+5 = 0$$

Une translation du système d'axes (complétion des carrés) permet alors de la mettre sous la forme (14).

Notons qu'en mécanique vibratoire, on parle de modes et de fréquences propres.

Le **cercle de Mohr** est une construction utilisée en mécanique pour construire les valeurs et les vecteurs propres d'une conique (Ellipse d'inertie, ellipse des contraintes).

Les vecteurs et valeurs propres sont utiles pour résoudre bien d'autres problèmes, par exemple, ils permettent le calcul de la puissance d'une matrice, ils permettent d'évaluer l'instabilité d'un système, etc...

# 4 Système d'équations différentielles linéaires

*Cet exemple est extrait du cours 6MVD chap.08 V Prot.pdf, page 118 de M. Chappuis.*

Le cas d'un couplage élastique de trois ressorts est étudié. Unités SI.

Données:

- Les rigidités $k_1 = 3000 \quad k_2 = 4000 \quad k_3 = 1000$
- Les masses $m_1 = 20 \quad m_2 = 10$
- Les positions des oscillateurs $x_1(t) \quad x_2(t)$
- Les conditions initiales $x_{10} = 1 \quad x_{20} = 2 \quad \dot{x}_{10} = 0 \quad \dot{x}_{10} = 1$
- La plage de temps: $t_0 = 0 \quad t_{max} = 3$

Les équations du mouvement sont mises sous forme matricielle:

$$\ddot{x} + Ax = 0 \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_1+k_3}{m_1} & -\frac{k_3}{m_1} \\ -\frac{k_3}{m_2} & \frac{k_2+k_3}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

La matrice $A$ n'étant pas diagonale, les équations sont dites **couplées**.

Un changement de base approprié, $x = Sy$ va permettre de les découpler.

La calcul des valeurs propres de $A$ donne

$$\lambda_1 = 515,831 \qquad \lambda_1 = 184,169$$

Les modes propres sont les racines carrées des valeurs propres:

$$\omega_1 = 22,712 \qquad \omega_2 = 13,571$$

Les vecteurs propres sont:

$$V_1 = \begin{bmatrix} -0,158 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} 3,158 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $S$ de changement de base admet pour colonnes les vecteurs-colonnes des vecteurs propres.

La formule de changement de base donne

$$x = Sy \Rightarrow \ddot{x} = S\ddot{y}$$

avec

$$S = \begin{bmatrix} -0,158 & 3,158 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans cette nouvelle base, les équations du mouvement deviennent

$$S\ddot{y} + ASy = 0 \Rightarrow$$
$$\ddot{y} + S^{-1}ASy = 0 \Leftrightarrow \ddot{y} + Dy = 0 \tag{18}$$

La matrice $D = S^{-1}AS$ est alors diagonale et admet les valeurs propres sur la diagonale.

$$D = \begin{bmatrix} 515.831 & 0 \\ 0 & 184.169 \end{bmatrix}$$

Le système est alors découplé:

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 515.831 & 0 \\ 0 & 184.169 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Avant d'intégrer, il faut encore transformer les conditions initiales:

$$y_0 = S^{-1}x_0 \qquad \dot{y}_0 = S^{-1}\dot{x}_0$$

$$\begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3015 & 0.9523 \\ 0.3015 & 0.0477 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,60 \\ 0,40 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{10} \\ \dot{y}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3015 & 0.9523 \\ 0.3015 & 0.0477 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,952 \\ 0,047 \end{bmatrix}$$

On peut maintenant intégrer selon les méthodes usuelles, on obtient:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.60357\cos(0.0261497 - 22.7119t) \\ 0.396993\cos(0.00886 - 13.5709t) \end{bmatrix}$$

Pour trouver les solutions en $x$, il faut appliquer la matrice $S$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2538\cos(0.00886 - 13.571t) - 0.253865\cos(0.02615 - 22.712t) \\ 1.6036\cos(0.02615 - 22.712t) + 0.396993\cos(0.00886 - 13.571t) \end{bmatrix}$$

On remarquera où se trouvent les pulsations.

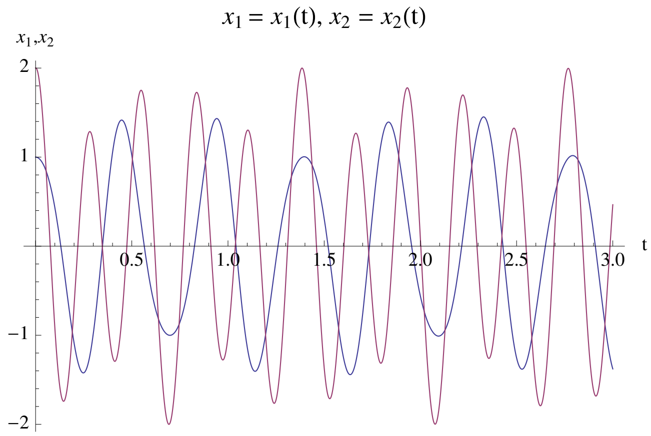



Figure 2: $x_1 = x_1(t)$ et $x_2 = x_2(t)$.

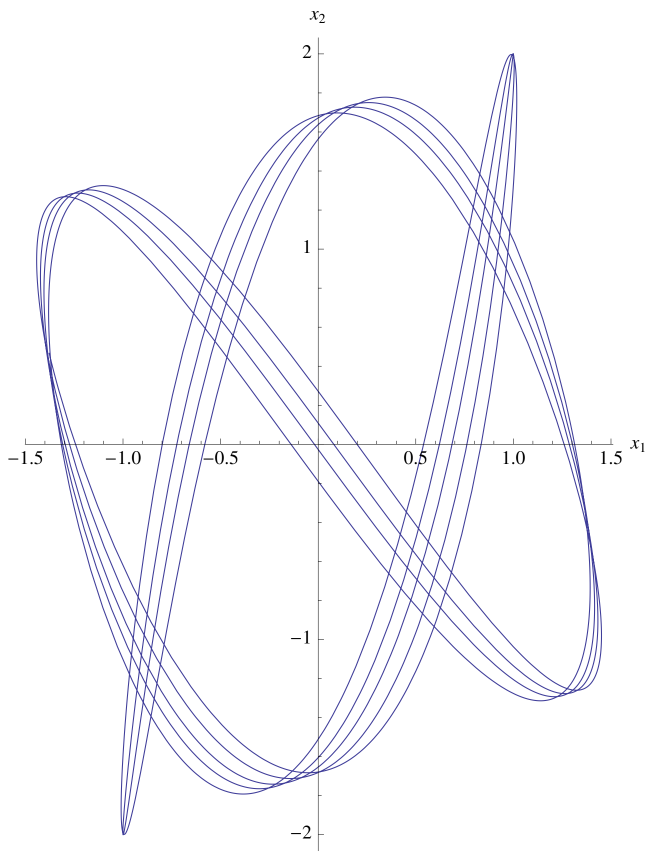



Figure 3: Plan $Ox_1x_2$, courbe paramétrée $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$.

# 5 Puissance d'une matrice

Supposons que l'on doive calculer la puissance $n$ d'une matrice. C'est facile si celle-ci est diagonale:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 2^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 4^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-n} \end{bmatrix}$$

C'est beaucoup plus difficile si la matrice n'est pas diagonale:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow B^n = \begin{bmatrix} 2^{-2n-1} + 2^{-n-1} & -2^{-2n-1} + 2^{-n-1} & 0 \\ -2^{-2n-1} + 2^{-n-1} & 2^{-2n-1} + 2^{-n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-n} \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres de $B$ permettent (en général) de transformer la matrice $B$ en matrice diagonale.
On utilise la matrice $S$, dite de changement de base, ses colonnes sont les vecteurs propres de $B$.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D = S^{-1}BS = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

On a alors

$$D^n = (S^{-1}BS)^n = (S^{-1}BS)(S^{-1}BS)(S^{-1}BS)... = S^{-1}B^nS \Rightarrow B^n = SD^nS^{-1}$$

Et on retrouve le résultat précédent.

Le procédé fonctionne même si les vecteurs propres sont complexes.
Certaines matrices ne sont pas diagonalisables par cette méthode, elles n'ont pas assez de vecteurs propres, mais toutes les matrices symétriques sont diagonalisables.

# 6 Exercices

**Exercice 1**

*Notons*

$R_\theta$ *une rotation autour de* $O$ *d'angle* $\theta$.

$S_\theta$ *une symétrie axiale d'axe* $y = \tan(\theta)\, x$.

$H_k$ *une homothétie de centre* $O$ *et de rapport* $k$.

1. *Calculer les déterminants des matrices de* $R_\theta$, $S_\theta$ *et* $H_k$.
2. *Donner les matrices inverses de* $R_\theta$, $S_\theta$ *et* $H_k$ *en étudiant les transformations associées.*
3. *Calculer la matrice du produit de* $R_\alpha$ *et* $R_\beta$. *Identifier la transformation.*
4. *Calculer la matrice du produit de* $S_\alpha$ *et* $S_\beta$. *Identifier la transformation.*
5. *Calculer la matrice du produit de* $R_\alpha$ *et* $S_\beta$. *Identifier la transformation.*
6. *Calculer la matrice du produit de* $S_\beta$ *et* $R_\alpha$. *Identifier la transformation.*
7. *Calculer la matrice du produit de* $H_{k_1}$ *et* $H_{k_2}$. *Identifier la transformation.*

**Exercice 2**

1. *Vérifier, en utilisant la formule générale de la matrice d'une rotation axiale dans l'espace, que les rotations d'axes* $Ox$, $Oy$ *et* $Oz$ *et d'angle* $\theta$ *ont bien la forme voulue.*
2. *Faire le produit d'une rotation d'angle* $\alpha$ *autour de l'axe* $Ox$ *et d'une rotation d'angle* $\beta$ *d'axe* $Oy$.

   *Calculer le déterminant de la matrice obtenue.*

   *Vérifier que la transformation obtenue laisse fixe le vecteur* $\vec{e} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

   *Quel est votre interprétation?*

**Exercice 3**

*Calculer la matrice d'une rotation de 45 degrés autour de l'axe parallèle au vecteur* $\vec{e} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

**Exercice 4**

*Calculer les valeurs et vecteur propres des matrices données dans les exemples du cours et les exercices précédents.*

**Exercice 5**

*Calculer les valeurs et vecteurs propres de la matrice.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*En déduire qu'elle ne peut pas être diagonalisable.*

**Exercice 6**

*Calculer les valeurs et vecteurs propres de la matrice.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*Montrer qu'elle peut être diagonalisée.*

**Exercice 7**
*Calculer les valeurs et vecteurs propres de la matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exercice 8**

- *Ecrire l'équation de la conique suivante sous les différentes formes matricielles et calculer les déterminants de ces matrices.*
$$3x^2 + 4xy + 3y^2 - 1 = 0$$
- *Réduire la conique sous la forme standard en opérant une rotation du système d'axes.*

**Exercice 9**
*Cet exercice provient du livre de mécanique vibratoire de M. Del Pedro et P. Pahud, page 125.*
*Il s'agit d'un monte-charge comportant un groupe moteur-réducteur, un arbre de grande longueur, un tambour, un câble et une charge.*

*Définitions (unités SI) :*

- $x = x(t)$ *: Position de la charge.*
- $\theta = \theta(t)$ *: Rotation du tambour.*
- $\lambda_1$ , $\lambda_2$ *: Valeurs propres*
- $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}$ , $\omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$ *: Pulsations propres*
- $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi}$ , $f_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi}$*: Fréquences propres*
- $d = 0.05$ *: Diamètre de l' arbre*
- $L = 3$ *: Longueur de l' arbre*
- $G = 0.8 \cdot 10^{11}$ *: Module de glissement de l' arbre*
- $R = 0.2$ *: Rayon du tambour*
- $J = 5$ *: Moment d' inertie du tambour*
- $A = 10^{-4}$ *: Section du câble*
- $h = 15$ *: Longueur lors du blocage*
- $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ *: Module d' élasticité du câble*
- $m = 300$ *: Masse de la charge*
- $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$ *: Moment d'inertie de l'arbre*
- $k_c = \dfrac{EA}{h}$ *: Rigidité en élongation du câble*
- $k_t = \dfrac{GI_p}{L}$ *: Rigidité en torsion de l'arbre*

*La mise en équations conduit au système de deux équations différentielles linéaires couplées:*

$$\begin{bmatrix} \theta''(t) \\ x''(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_c R^2 + k_t}{J} & -\frac{k_c R}{J} \\ -\frac{k_c R}{m} & \frac{k_c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. *On demande de calculer les fréquences propres et les modes propres (vecteurs propres) de la matrice du système.*
2. *Vérifier que les valeurs et vecteurs propres trouvés satisfont l'équation* $A\ V = \lambda\ V$.
3. *Les vecteurs propres sont-ils perpendiculaires?*
4. *Résoudre le système en découplant les équations différentielles avec les conditions initiales*

$$\theta(0) = 0 \qquad \dot{\theta}(0) = 10 \qquad x(0) = 1 \qquad \dot{x}(0) = 1$$

5. *Dessiner* $\theta = \theta(t)$, $x = x(t)$ *et la courbe paramétrée* $\theta = \theta(t), x = x(t)$.

**Exercice 10**
*La suite de Fibonacci est une suite d'entiers très connue.*
*Elle doit son nom à un mathématicien italien du xiiie siècle connu sous le nom de Leonardo Fibonacci qui, dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le Liber Abaci, décrit la croissance d'une population de lapins :*
*"Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur.*
*Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? "*
*Ce problème est à l'origine de la suite dont le n-ième terme correspond au nombre de paires de lapins au n-ème mois.*
*Dans cette population (idéale), on suppose que :*
*au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;*
*les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;*
*chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux ;*
*les lapins ne meurent jamais (donc la suite de Fibonacci est strictement croissante).*
*Source: wikipedia.*

*Notons* $f(n)$ *le nombre de lapins en l'an* $n$.
*On aboutit à la loi de récurrence suivante:*

$$f(1) = f(2) = 1 \qquad f(n+2) = f(n+1) + f(n)$$

*Posons*

$$F(n) = \begin{bmatrix} f(n) \\ f(n+1) \end{bmatrix}$$

*Il est facile de voir que*

$$F(n) = MF(n-1) = M^2 F(n-2) = M^3 F(n-3) = M^{n-1} F(1)$$

*où*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*On demande de calculer* $M^{n-1}$ *et* $F(n)$ *et donc* $f(n)$.

# 7 Corrigés

**Corrigé ex 1**

1. *Les déterminants valent* 1, 1 *et* $k$.
2. *Ce sont les matrices des transformations* $R_{-\theta}$, $S_\theta$ *et* $H_{1/k}$.
3. *C'est la matrice de la rotation* $R_{\alpha+\beta}$.
4. *C'est la matrice de la rotation* $R_{2(\alpha-\beta)}$.
5. *C'est la matrice de la symétrie* $S_{\beta+\frac{\alpha}{2}}$.
6. *C'est la matrice de la symétrie* $S_{\beta-\frac{\alpha}{2}}$.
7. *C'est la matrice de l'homothétie* $H_{k_1 k_2}$.

**Corrigé ex 2**

1. *Il suffit de remplacer les valeurs numériques.*
2. *On obtient*

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

*Le déterminant de la matrice vaut* 1.

*C'est la matrice d'une rotation autour de l'axe parallèle au vecteur* $\vec{e} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

**Corrigé ex 3**

*On obtient la matrice de déterminant 1:*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{2}\right) & \frac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}-\sqrt{6}\right) & \frac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) \\ \frac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) & \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{2}\right) & \frac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}-\sqrt{6}\right) \\ \frac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}-\sqrt{6}\right) & \frac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) & \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{2}\right) \end{bmatrix}$$

**Corrigé ex 4**

*Les valeurs et les vecteurs propres des rotations planes sont complexes.*

**Corrigé ex 5**

*Les deux valeurs propres sont égales à* 1.
*Le seul vecteur propre est*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Elle ne peut pas être diagonalisable, car i l faudrait deux vecteurs propres distincts et il n'y en a qu'un.*

**Corrigé ex 6**

*Les valeurs propres sont* 1 *et* 2.
*Les vecteurs propres sont*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*La matrice du changement de base est donnée par*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*et*

$$M' = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*est bien diagonale.*

**Corrigé ex 7**
*Les valeurs propres sont*

$$\left\{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{73}\right), \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{73}\right), 0\right\}$$

*et les vecteurs propres correspondants:*

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\left(3+\sqrt{73}\right) & -\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\left(3-\sqrt{73}\right) & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Corrigé ex 8**

- *Les matrices sont*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- *La matrice de rotation est*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  *et la conique s'écrit dans la nouvelle base:*

$$10x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

  *et l'on reconnaît une ellipse de demi-axes* $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $b = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

**Corrigé ex 9**
*Le système s'écrit*

$$\ddot{X} + AX = 0$$

*En posant*

$$X = SY$$

*on obtiendra*

$$\ddot{Y} + S^{-1}ASY = 0 \Leftrightarrow \ddot{Y} + DY = 0$$

*1.*

$$\lambda_1 = 828.5 \qquad \lambda_2 = 17551 \qquad \omega_1 = 28.7837 \qquad \omega_2 = 132.496$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 4.06794 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} -14.7495 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*2.*

$$A = \begin{bmatrix} 13939.2 & -53333.3 \\ -888.889 & 4444.44 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 4.06794 & -14.7495 \\ 1. & 1. \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

*3. Une fois découplé, le système s'écrit*

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} y1''(t) & + & \omega_1^2\, y1(t) & = & 0 \\ y2''(t) & + & \omega_2^2\, y2(t) & = & 0 \end{array} \right\}$$

*Remarquons que les nouvelles variables n'ont aucun sens physique, ce sont des combinaisons linéaires d'angles et de distances!*

*La solution générale est*

$$y_1(t) = c_{11}\ \cos(\omega_1 t) + c_{12}\ \sin(\omega_1 t) = A_1\ \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$y_2(t) = c_{21}\ \cos(\omega_2 t) + c_{22}\ \sin(\omega_2 t) = A_2\ \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

*4. Les conditions initiales pour les variables $y_1, y_2$ sont données par*

$$Y(0) = S^{-1}X(0) \qquad \dot{Y}(0) = S^{-1}\dot{X}(0)$$

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 0.0531422 & 0.783821 \\ -0.0531422 & 0.216179 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(0) \\ x(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0531422 & 0.783821 \\ -0.0531422 & 0.216179 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.783821 \\ 0.216179 \end{bmatrix}$$

$$\dot{Y}(0) = \begin{bmatrix} 0.0531422 & 0.783821 \\ -0.0531422 & 0.216179 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0531422 & 0.783821 \\ -0.0531422 & 0.216179 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.31524 \\ -0.315243 \end{bmatrix}$$

*Les conditions initiales déterminent les constantes:*

$$c_{11} = 0.7838 \quad c_{12} = 0.0457 \quad c_{21} = 0.2162 \quad c_{22} = -0.002379$$

*et les solutions*

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 0.18588 \sin(28.7837t) + 0.0351 \sin(132.496t) + 3.1885 \cos(28.7837t) - 3.1885 \cos(132.496t) \\ x(t) &= 0.04569 \sin(28.7837t) - 0.00238 \sin(132.496t) + 0.78382 \cos(28.7837t) + 0.21618 \cos(132.496t) \end{aligned}$$

**Corrigé ex 10**

$$f(n) = \frac{2^{-n}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right)}{\sqrt{5}}$$

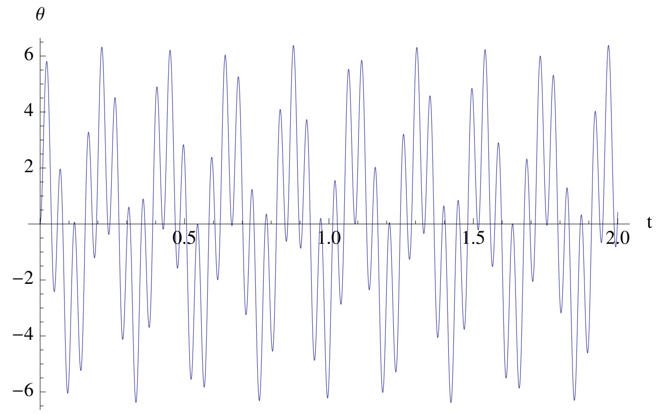



Figure 4: $\theta = \theta(t)$.

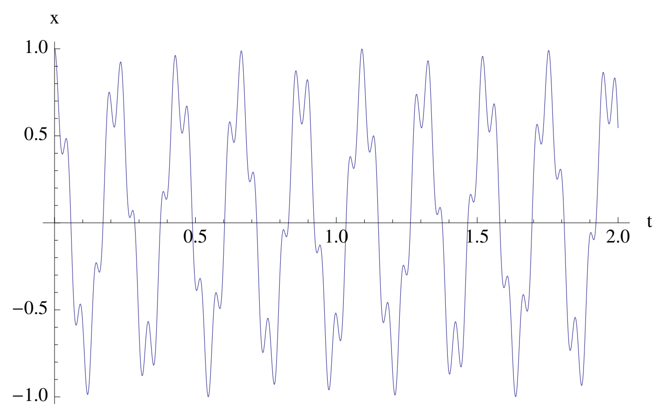



Figure 5: $x = x(t)$.

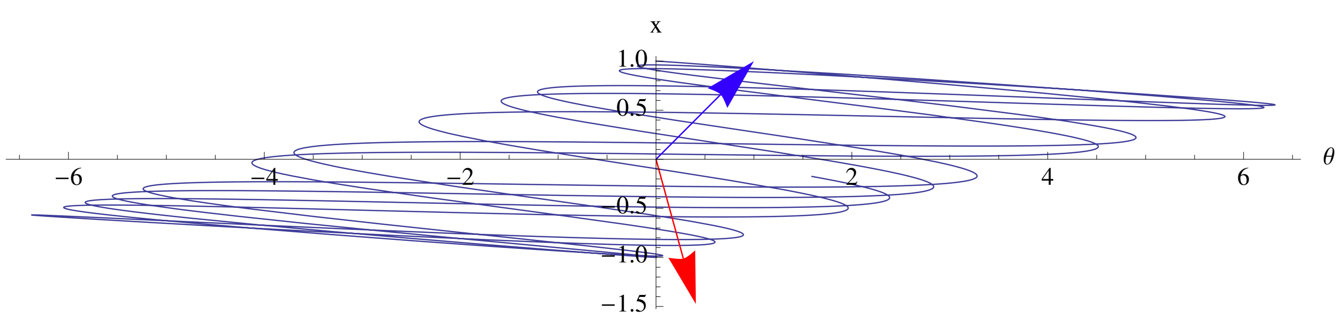



Figure 6: Plan $O\theta x$, courbe paramétrée $\theta = \theta(t)$, $x = x(t)$ avec les directions propres.