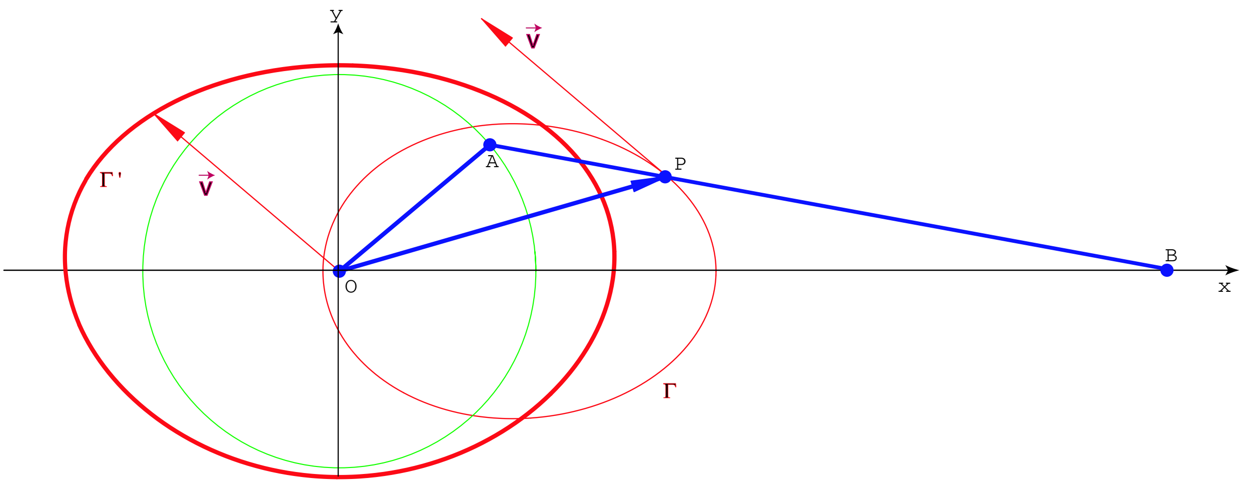
heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Courbes paramétrées

Lang Fred, prof. HEIG-VD[1]

Pour concrétiser ce cours, on utilisera le langage de la cinématique et le temps pour paramètre. Les résultats restent valables si le paramètre représente un angle ou tout autre quantité.



Mouvement bielle-manivelle: hodographe Γ*' du vecteur vitesse* $\vec{v}$ *et trajectoire* Γ *d'un point de la bielle.*

[1] Version 2007

1 Exemples

1.1 Mouvement circulaire

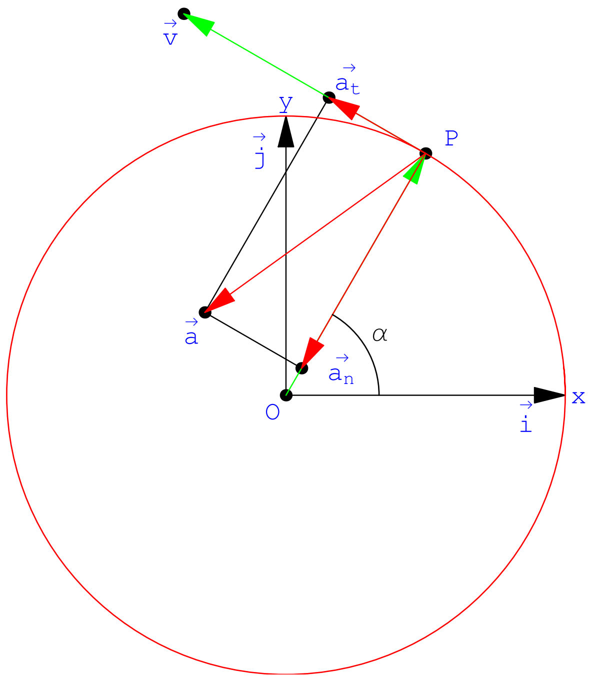


Figure 1: Mouvement circulaire: vecteurs position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$, celle-ci se décompose en composantes tangentielle $\vec{a}_t$ et normales $\vec{a}_n$.

Sur la figure, on peut observer deux propriétés qui se généraliseront à tous les mouvements:

- L'accélération et sa composante normale sont dirigés du même côté de la trajectoire, celui indiqué par la courbure de la courbe.
- Si le véhicule accélère, l'accélération tangentielle va contribuer à augmenter la vitesse et a le même sens que celui-ci, si le véhicule décélère, les vecteurs seront de sens opposés.

Le **vecteur position** est donné par:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t) = R\,(\,\cos(\alpha)\,\vec{i} + \sin(\alpha)\,\vec{j}\,)$$

où R est le rayon du cercle et $\alpha = \alpha(t)$ est l'angle entre l'axe Ox et $\vec{r}$.

Le **vecteur vitesse** s'obtient en dérivant le vecteur position:

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = R\,\omega\,(\,-\sin(\alpha)\,\vec{i} + \cos(\alpha)\,\vec{j}\,)$$

où

$$\omega = \omega(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}$$

est la **vitesse angulaire**[2].

[2]que nous supposerons positive pour alléger les notations.

La **vitesse scalaire** est la norme du vecteur vitesse:

$$v = v(t) = \|\vec{v}\| = R\,\omega$$

Le **vecteur accélération** est la dérivée du vecteur vitesse:

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = R\,\dot{\omega}\,(\,-\sin(\alpha)\,\vec{i} + \cos(\alpha)\,\vec{j}\,) - R\,\omega^2\,(\,\cos(\alpha)\,\vec{i} + \sin(\alpha)\,\vec{j}\,)$$

où $\dot{\omega}$ est l'**accélération angulaire**.

Comme on le voit, ce vecteur se décompose en deux composantes, tangentielle et normale:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

où

$$\vec{a}_t = R\,\dot{\omega}\,(\,-\sin(\alpha)\,\vec{i} + \cos(\alpha)\,\vec{j}\,)$$

est l'**accélération tangentielle** et

$$\vec{a}_n = -R\,\omega^2\,(\,\cos(\alpha)\,\vec{i} + \sin(\alpha)\,\vec{j}\,)$$

est l'**accélération normale**.

Leurs normes sont

$$a_t = R\,\dot{\omega}$$

et

$$a_n = R\,\omega^2 = v^2/R$$

Celle de l'accélération est:

$$a = R\,\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$$

Il est facile de constater que les affirmations suivantes sont équivalentes

- ω est constante
- $\dot{\omega}$ est nulle
- $a_t = 0$
- $\vec{a}_t = \vec{o}$
- $\vec{a} = \vec{a}_n$
- $a = a_n$
- v est constante
- $\dot{v}$ est nulle
- $a = v^2/R$
- Pour un mouvement plan: $\vec{r}$ est de norme constante $\Leftrightarrow$ $\vec{r} \perp \vec{v}$

Le dernier point se justifie par le calcul suivant:

$$\left(r^2\right)^{\cdot} = (\vec{r}\cdot\vec{r})^{\cdot} = 2\,\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}$$

Annuler le membre de gauche, c'est dire que le vecteur position est de norme constante et le produit scalaire du membre de droite s'annule si les vecteurs sont orthogonaux.

Vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$

Ce vecteur est perpendiculaire au plan de rotation et est orienté dans le sens de celle-ci selon le règle du tire-bouchon et sa norme est la vitesse angulaire:

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$$

On établira en exercice les résultats suivants:

- $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$
- $\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$

1.2 Mouvement cycloïdal

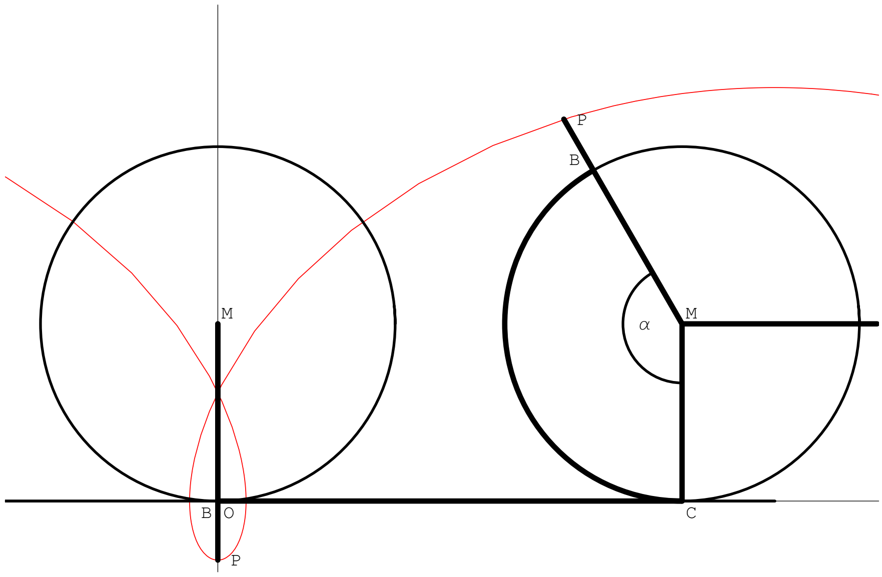


Figure 2: Mouvement cycloïdal: Une roue tourne sur un rail sans glisser. Un point P, lié à la roue, décrit une cycloïde.

Légende:

- Ox // OC = Rail.
- M: Centre de la roue.
- P Point lié à la roue.
- C: Point de contact de la roue avec le rail.
- B: Point sur la roue et sur le bras MP.
- R: Rayon de la roue.
- d: Longueur du bras MP.
- α: Angle de rotation de la roue.

Nous supposerons que la vitesse angulaire est constante et positive pour alléger les calculs.

Un peu de trigonométrie[3] permet de déterminer le vecteur position:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MP} = R\,\alpha\,\vec{i} + R\,\vec{j} - d\sin(\alpha)\,\vec{i} - d\cos(\alpha)\,\vec{j}$$

Ainsi

$$\vec{r}(t) = (R\,\alpha - d\sin(\alpha))\,\vec{i} + (R - d\cos(\alpha))\,\vec{j} = \begin{bmatrix} R\alpha - d\sin(\alpha) \\ R - d\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Le vecteur vitesse est alors:

$$\vec{v} = \omega\,(\,(R - d\cos(\alpha))\,\vec{i} + d\sin(\alpha)\,\vec{j}\,) = \omega \begin{bmatrix} R - d\cos(\alpha) \\ d\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

[3] Voir par exemple Analyse, Stewart tome I page 51.

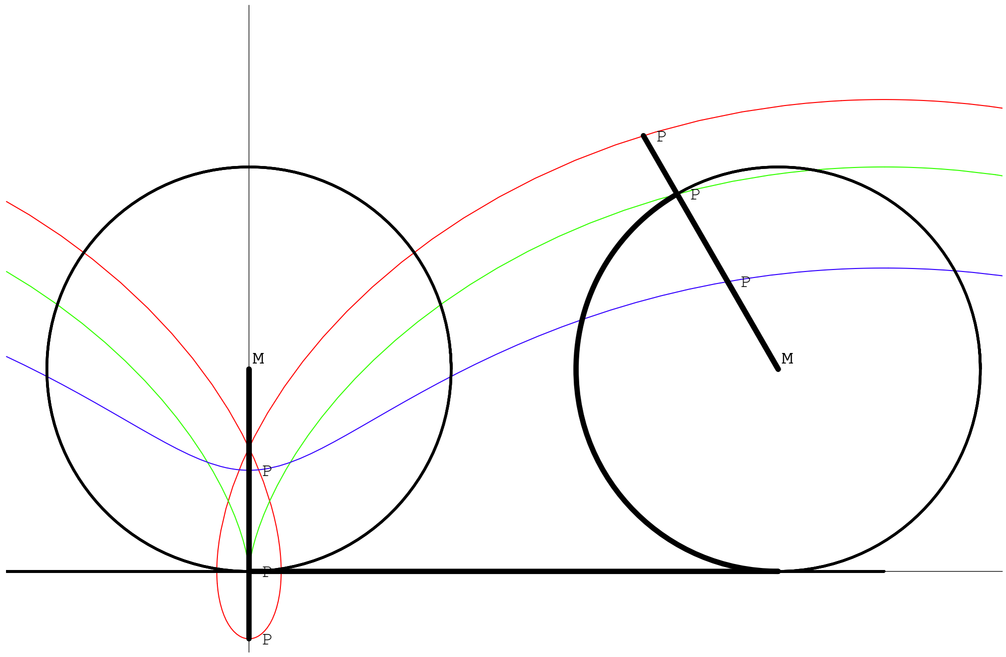


Figure 3: La cycloïde est étendue si P est à l'extérieur de la roue, raccourcie s'il est à l'intérieur.

et la vitesse scalaire:

$$v = \omega\sqrt{d^2 - 2Rd\cos(\alpha) + R^2}$$

Le vecteur accélération est dirigé vers le centre de la roue:

$$\vec{a} = d\,\omega^2\,(\,\sin(\alpha)\,\vec{\imath} + \cos(\alpha)\,\vec{\jmath}\,) = \omega^2 d \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \omega^2\,\overrightarrow{MP}$$

Sa norme est:

$$a = \omega^2 d$$

Pour décomposer ce vecteur en composantes tangentielle et normale à la courbe, procédons par étapes.

1. Le vecteur tangent unitaire est défini par:

$$\vec{e}_t = \vec{v}/v = \frac{\omega}{v}\,(\,(R - d\cos(\alpha))\,\vec{\imath} + d\sin(\alpha)\,\vec{\jmath}\,) = \frac{\omega}{v}\begin{bmatrix} R - d\cos(\alpha) \\ d\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

2. Le vecteur accélération tangentielle est alors un multiple a_t de $\vec{e}_t$.

   On établira, dans la partie théorique, que ce multiple, l'accélération tangentielle scalaire, est la dérivée de la vitesse scalaire.

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

   On peut aussi calculer directement le vecteur accélération tangentielle en projetant le vecteur accélération sur le vecteur vitesse.

   Rappel: Projection d'un vecteur $\vec{a}$ sur un vecteur $\vec{v}$

$$\vec{a}_{/\!/} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\;\vec{v}$$

   Le calcul donne

$$a_t = \frac{d\,R\,\omega^3\,\sin(\alpha)}{v}$$

et

$$\vec{a}_t = a_t\,\vec{e}_t$$

3. Le vecteur $\vec{a}_n$ s'obtient alors par $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$

   On arrive à:

$$\vec{a}_n = a_n\,\vec{e}_n$$

avec

$$a_n = \frac{d\,\omega^3\,|d - R\cos(\alpha)|}{v}$$

et

$$\vec{e}_n = \frac{\omega}{v}\,(\,d\sin(\alpha)\,\vec{i} + (d\cos(\alpha) - R)\,\vec{j}\,) = \frac{\omega}{v}\begin{bmatrix} d\sin(\alpha) \\ d\cos(\alpha) - R \end{bmatrix}$$

On vérifiera l'identité de Pythagore:

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

Remarquons que, dans le cas du mouvement circulaire, la quantité v^2/a_n donnait le rayon R du cercle.

Ici, elle donne le **rayon de courbure** de la cycloïde et vaut

$$\rho = \frac{v^3}{d\,\omega^3(d - R\cos(\alpha))}$$

Ce n'est plus une constante.

Le vecteur vitesse angulaire est ici:

$$\vec{\omega} = -\omega\,\vec{k}$$

On vérifiera que:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}$$

Ce qui s'interprète ainsi:
A chaque instant t, tout se passe comme si le point P décrivait un mouvement circulaire de centre C.
Ce point est appelé le **centre de rotation instantané**.
On peut constater, comme dans le cas du cercle, que le vecteur $\vec{a}_n$ est dirigé selon la direction $\overrightarrow{PC}$.

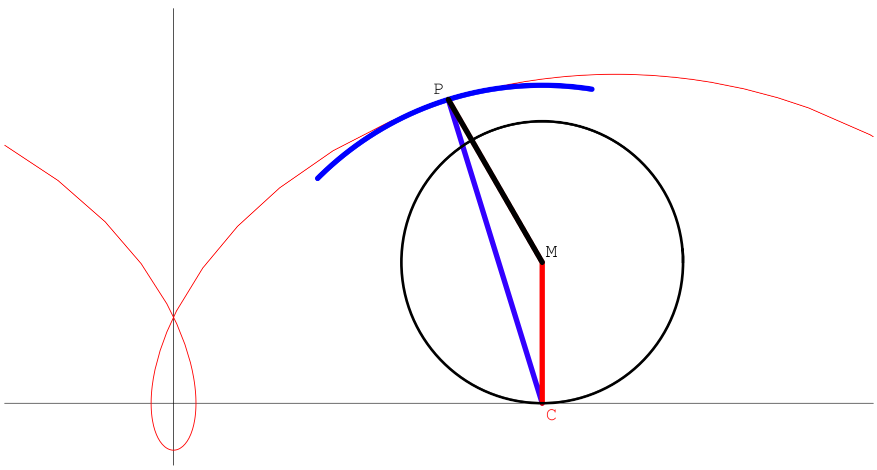


Figure 4: Le point P tourne autour du centre de rotation instantané C.

1.3 Mouvement bielle-manivelle

La bielle AB permet de transformer le mouvement rectiligne du piston B en un mouvement rotatif, celui de la manivelle A ou inversément.
Un point P de celle-ci décrit une trajectoire de forme elliptique, ce ne sont pas des ellipses, mais des courbes du quatrième degré.

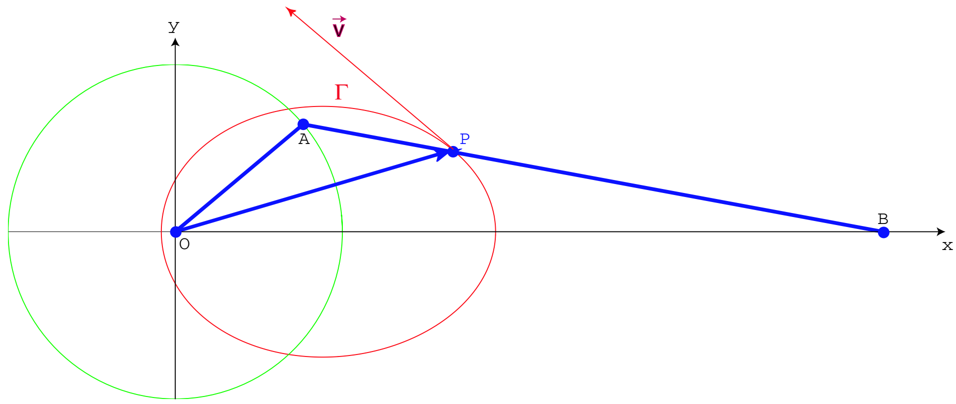


Figure 5: Mouvement bielle-manivelle: trajectoire Γ d'un point P de la bielle. Vecteurs position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ et vitesse $\vec{v}$. Le vecteur $\vec{v}$ est toujours tangent à la trajectoire.

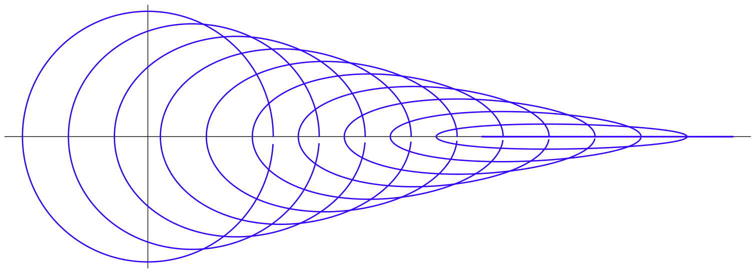


Figure 6: Transformation du mouvement rectiligne en mouvement circulaire.

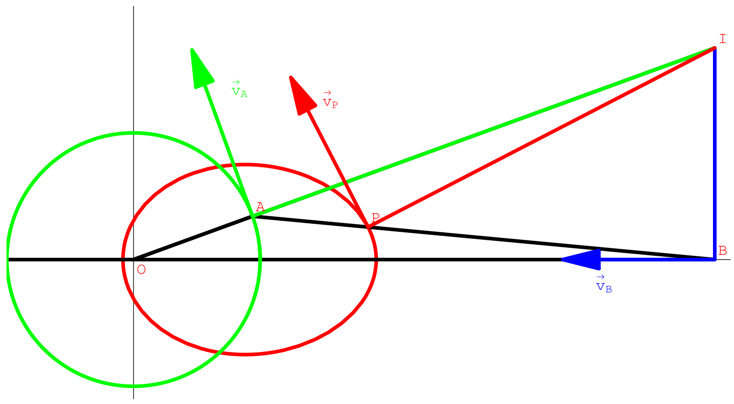


Figure 7: Les vecteurs vitesses des points A, B et P sont orthogonaux aux vecteurs $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IP}$, cette propriété permet de construire la tangente en un point quelconque de la trajectoire décrite par P.

1.4 Barre coulissante

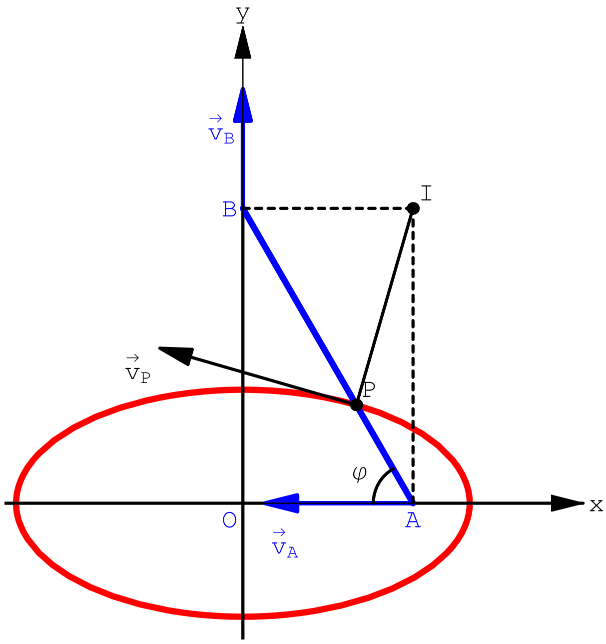


Figure 8: Un point P lié à la barre coulissante AB décrit une ellipse de centre O et de demi-axes a et b. Le centre instantané de rotation I est situé au coin du rectangle $OAIB$.

Les extrémités A et B d'une barre de longueur L, se déplacent sur deux axes perpendiculaires Ox et Oy, voir la figure (8).
Notons $a = PB$ et $b = PA$.
Comme on le voit sur la figure (8), les vecteurs vitesses des points A, B, P sont perpendiculaires aux rayons IA, IB, IP issus du centre instantané de rotation I.

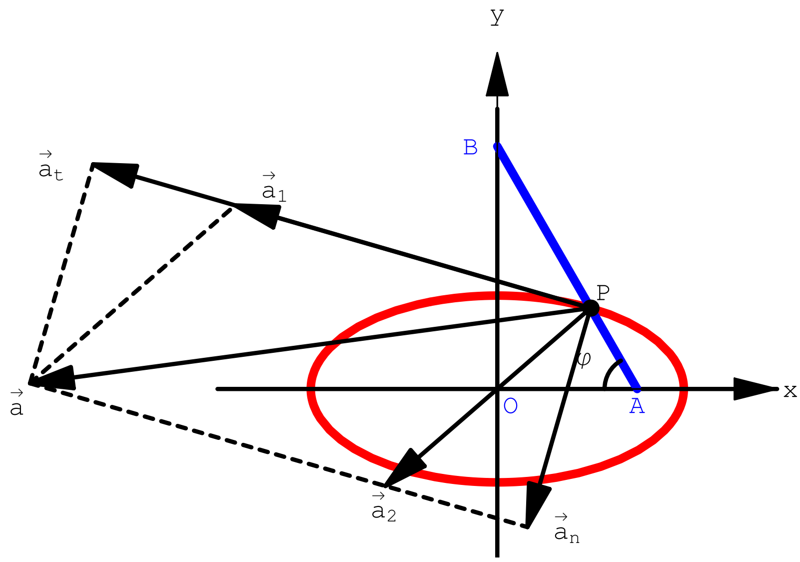


Figure 9: Deux décompositions de l'accélération dans le cas où la vitesse angulaire n'est constante.

Les vecteurs position, vitesse et accélération du point P sont donnés en fonction de l'angle $\varphi = \varphi(t)$ par:

$$\vec{r}(\varphi) = a\ \cos(\varphi)\,\vec{i} + b\ \sin(\varphi)\ \vec{j}$$

$$\vec{v}(\varphi) = \omega\,(\ -a\ \sin(\varphi)\,\vec{i} + b\ \cos(\varphi)\ \vec{j}\ )$$

$$\vec{a}(\varphi) = \dot{\omega}\,(\ -a\ \sin(\varphi)\,\vec{i} + b\ \cos(\varphi)\ \vec{j}\ ) - \omega^2\,(\ a\ \cos(\varphi)\,\vec{i} + b\ \sin(\varphi)\ \vec{j}\ ) = \vec{a}_1(\varphi) + \vec{a}_2(\varphi)$$

La première composante $\vec{a}_1(\varphi)$ est parallèle à la vitesse, mais **ce n'est pas l'accélération tangentielle**, car la seconde composante $\vec{a}_2(\varphi)$ n'est pas perpendiculaire à la vitesse (figure (9).

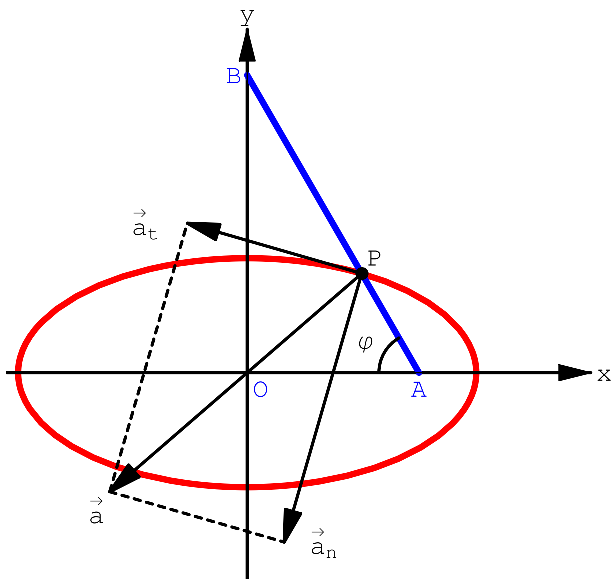


Figure 10: Décomposition de l'accélération dans le cas où la vitesse angulaire est constante.

Nous allons examiner la décomposition dans le cas où la vitesse angulaire est constante, dans ce cas la première composante est nulle et on a alors

$$\vec{a}(\varphi) = -\omega^2\,(\ a\ \cos(\varphi)\,\vec{i} + b\ \sin(\varphi)\ \vec{j}\ ) = \vec{a}_t(\varphi) + \vec{a}_n(\varphi)$$

avec

$$\vec{a}_t(\varphi) = \frac{\omega^2(a^2 - b^2)\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{b^2\cos^2(\varphi) + a^2\sin^2(\varphi)}\,(\ -a\sin(\varphi)\,\vec{i} + b\cos(\varphi)\ \vec{j}\ )$$

et

$$\vec{a}_n(\varphi) = \frac{ab\omega^2}{b^2\cos(\varphi) + a^2\sin^2(\varphi)}\,(\ -b\cos(\varphi)\,\vec{i} - a\sin(\varphi)\ \vec{j}\ )$$

Le calcul des normes des accélérations donne:

$$a_t = \frac{\omega^2(a^2 - b^2)\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{\sqrt{b^2\cos^2(\varphi) + a^2\sin^2(\varphi)}}$$

$$a_n = \frac{ab\omega^2}{\sqrt{b^2\cos^2(\varphi) + a^2\sin^2(\varphi)}}$$

$$a = \omega^2 \sqrt{b^2 \cos^2(\varphi) + a^2 \sin^2(\varphi)}$$

On vérifiera que

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

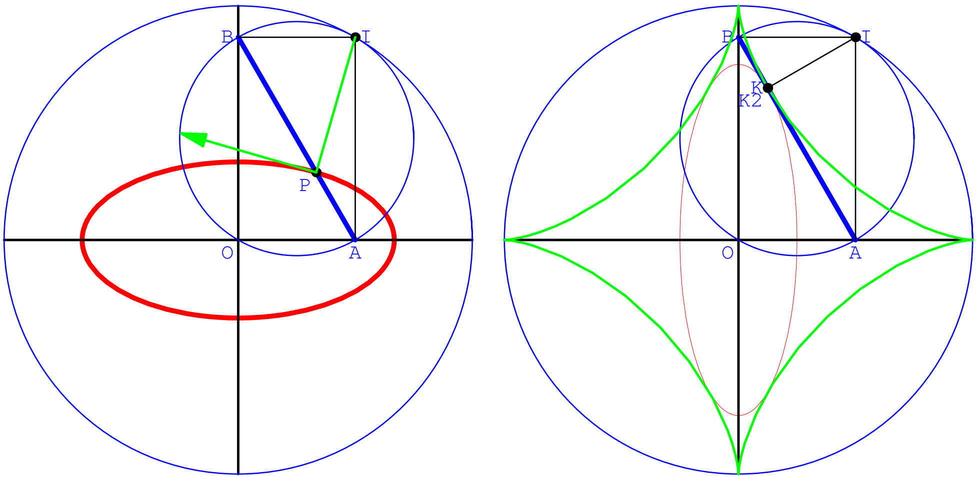


Figure 11: Le même mouvement est engendré par la rotation d'une roue à l'intérieur d'une autre dont le diamètre est le double.

Comme on peut le voir sur la figure (12), lors de son mouvement, la barre enveloppe une courbe, ici une astroïde.

L'équation d'une **enveloppe** s'établit de la manière suivante:

1. On écrit l'équation de la droite:
$$y = -\tan(\varphi)\, x + L \sin(\varphi)$$

2. On dérive l'équation par rapport au paramètre, ici φ:
$$0 = -\frac{1}{\cos^2(\varphi)}\, x + L \cos(\varphi)$$

3. On peut, à l'aide de ces deux équations, exprimer x et y en fonction de φ, on obtient les équations paramétriques de l'enveloppe:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(\varphi) & = & L \cos^3(\varphi) \\ y(\varphi) & = & L \sin^3(\varphi) \end{array} \right\}$$

4. On peut éliminer le paramètre φ entre les deux dernières équations et on obtient l'équation cartésienne de l'enveloppe:
$$x^{2/3} + y^{2/3} = L^{2/3}$$

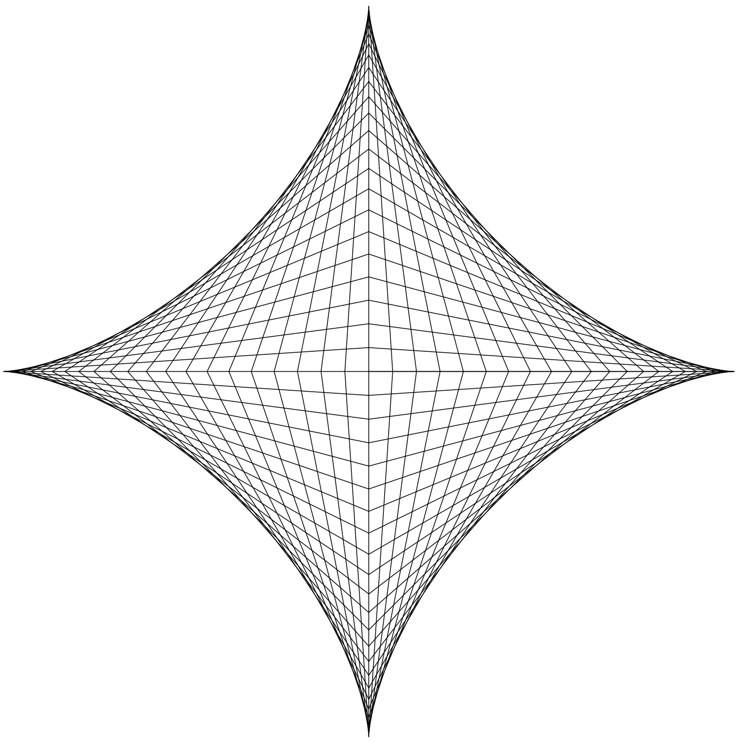


Figure 12: L'enveloppe des positions de la barre est une astroïde.

2 Vecteurs position et vitesse

Nous allons définir les notions de vecteur dérivé, de vitesse vectorielle et scalaire, ainsi que la tangente positive à une courbe.

Un point mobile P est décrit, par rapport à un système d'axes fixes, O $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ à l'aide d'un **vecteur position $\vec{\mathbf{r}}$**:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t) \tag{1}$$

Lorsque t varie, l'extrémité P de $\overrightarrow{OP}$ décrit une courbe Γ, la trajectoire de P.
Voir l'exemple de la figure (13).

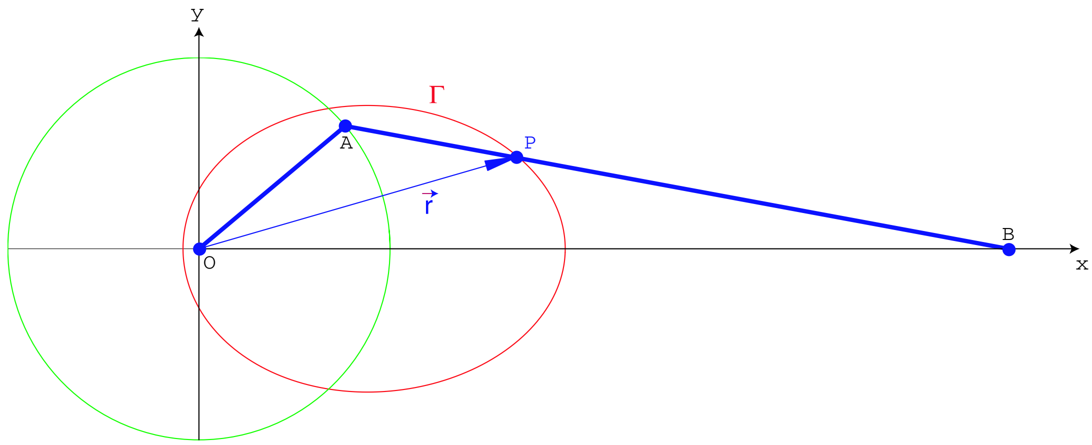


Figure 13: Mouvement bielle-manivelle: vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ et trajectoire Γ d'un point de la bielle.

En donnant un accroissement Δt à t, le nouveau vecteur position est $\overrightarrow{OP'} = \vec{r}(t + \Delta t)$ et le vecteur $\overrightarrow{PP'}$ est donné par:

$$\overrightarrow{PP'} = \Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Le **vecteur vitesse $\vec{\mathbf{v}}$** du point mobile P est défini par:[4] Voir la figure (14).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{2}$$

Si $\vec{r}$ est donné par ses composantes dans le repère fixe O$\vec{i}\vec{j}\vec{k}$:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Le vecteur vitesse est alors donné par les dérivées de celles-ci:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} \tag{3}$$

Le vecteur $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ mesure la variation du vecteur $\vec{r}$ en direction et en amplitude.
Il définit la direction et le sens d'une droite orientée appelée **tangente positive** en P, elle indique le sens

[4] Pour autant que la limite existe.

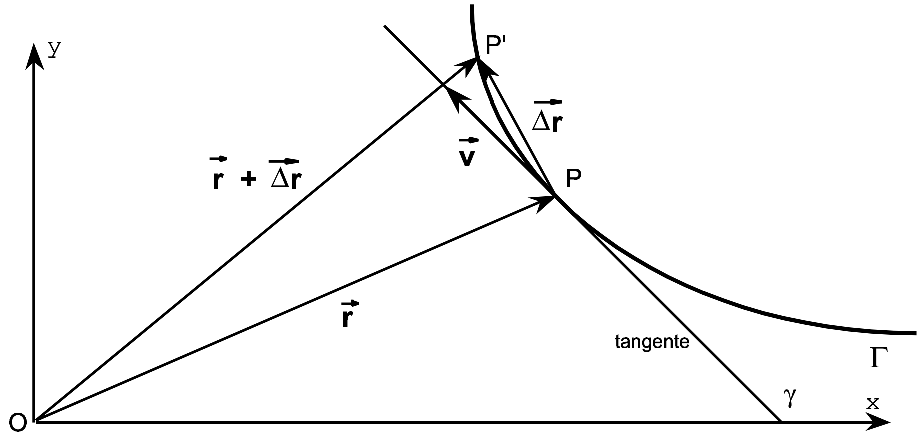


Figure 14: Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est la position limite du vecteur $\Delta\vec{r}$.

du déplacement de P, lorsque t est croissant.

Notons $s = s(t)$ la longueur de l'arc de courbe $\widehat{P_0P}$ mesuré à partir de la position P_0 de P à l'instant $t = 0$.

La **vitesse scalaire v** est définie par:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{4}$$

C'est une quantité algèbrique, positive ou négative, selon que le mouvement va dans le sens des arcs s croissants ou décroissants.
La norme du vecteur vitesse est la valeur absolue de v:

$$||\vec{v}|| = |v| \geq 0$$

En composantes:

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{5}$$

On a aussi:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{6}$$

3 Propriétés de la dérivée des vecteurs

Ce sont les mêmes que celles des fonctions. Attention toutefois à la non-propriété 6!

Propriété 1
Somme

$$(\vec{a} + \vec{b})' = \vec{a}' + \vec{b}'$$

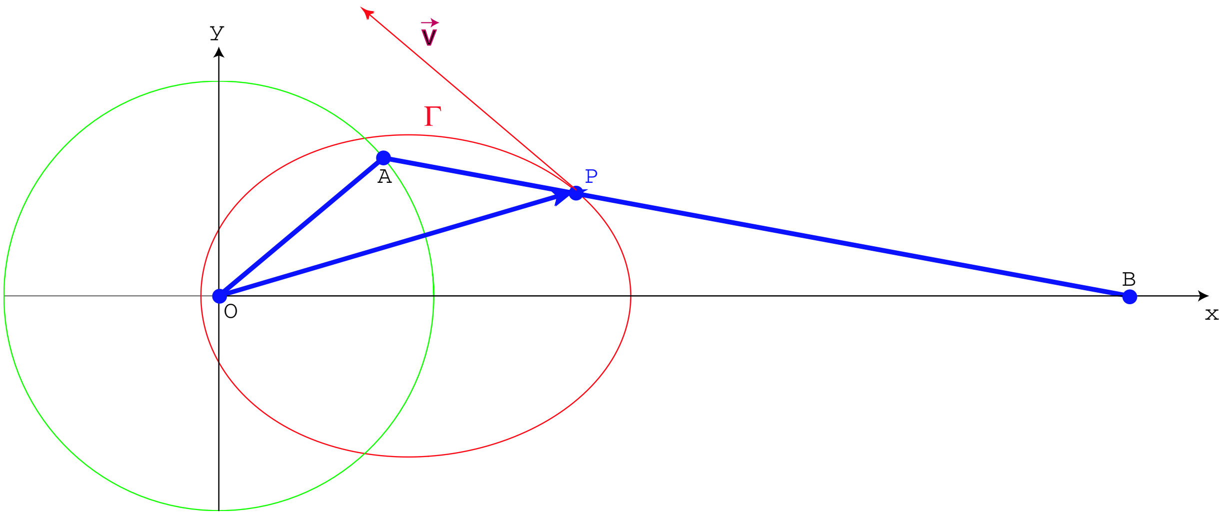


Figure 15: Mouvement bielle-manivelle: vecteur vitesse $\vec{v}$ et trajectoire Γ d'un point de la bielle.

Propriété 2
Produit par une constante

$$(c\,\vec{a})' = c\,\vec{a}'$$

Propriété 3
Produit par une fonction

$$(f(t)\,\vec{a})' = f'(t)\,\vec{a} + f(t)\,\vec{a}'$$

Propriété 4
Produit scalaire

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})' = \vec{a}'\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b}'$$

Propriété 5
Produit vectoriel

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})' = \vec{a}'\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\vec{b}'$$

Propriété 6
Norme

$$\|\vec{a}'\| \neq \|\vec{a}\|'$$

Propriété 7
Dérivée

$$\|\vec{a}\| = constant \Leftrightarrow \vec{a}' \perp \vec{a}$$

Le vecteur dérivé d'un vecteur de norme constante est perpendiculaire à celui-ci.
(Exemple: Dans le mouvement circulaire, le vecteur "rayon" étant de norme constante, son vecteur dérivé, le vecteur vitesse, est perpendiculaire au rayon, donc tangent au cercle)

La dérivée de la longueur n'est pas égale à la longueur de la dérivée

4 Vecteur accélération, normale positive et plan osculateur

Nous allons définir le vecteur accélération, l'accélération scalaire, la normale principale à la courbe et le plan osculateur.

Si on attache les vecteurs vitesse à la même origine O, leurs extrémités décrivent une courbe appelée hodographe de la vitesse, nous pouvons définir le **vecteur accélération $\vec{a}$** comme étant le vecteur dérivé du vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{7}$$

Si $\vec{v}$ est donné par ses composantes dans le repère fixe O $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Le vecteur accélération est alors donné par les dérivées de celles-ci:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k} \tag{8}$$

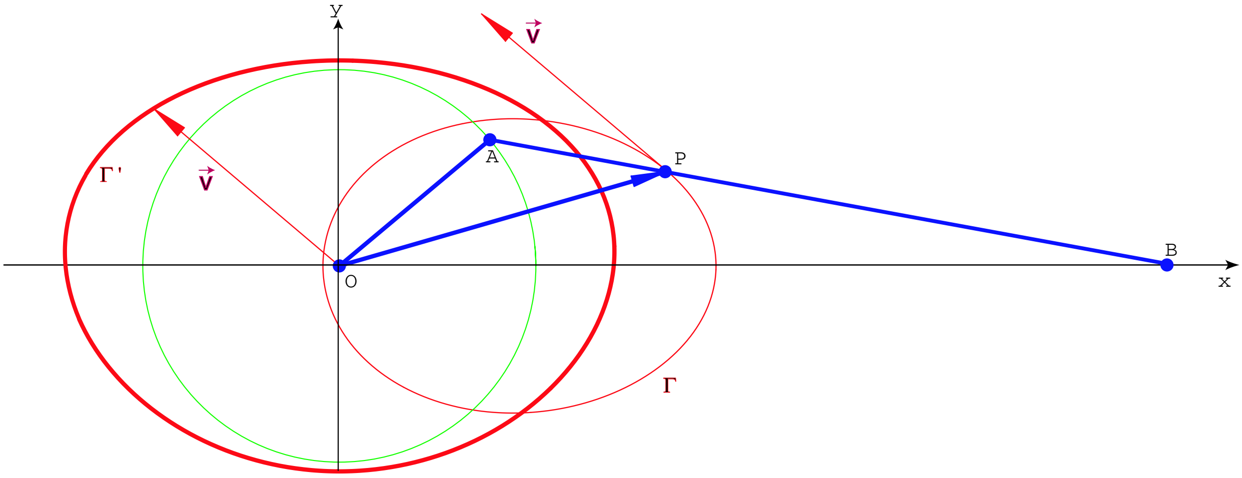


Figure 16: Mouvement bielle-manivelle: hodographe Γ' du vecteur vitesse $\vec{v}$ et trajectoire Γ d'un point de la bielle.

Le vecteur $\vec{a}$ représente la vitesse du point décrivant l'hodographe de la vitesse.
Il mesure la variation du vecteur vitesse en direction et en amplitude.

Il permet de définir une droite orientée n, perpendiculaire à la courbe, orientée du même côté que $\vec{a}$, appelée **normale principale** en P.
L'orientation du couple de vecteurs $(\vec{v}, \vec{a})$ donne le signe de la courbure.
Le plan déterminé par le point P et les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ est le **plan osculateur** en P. C'est le plan "le plus près" de la courbe.

L'angle α que fait le vecteur accélération avec le vecteur vitesse peut prendre toutes les valeurs entre 0 et π.

Si les vecteurs vitesse et accélération sont parallèles, en général, la courbure change de signe et le point est un point d'**inflexion**.

L'**accélération scalaire a** est donnée par la norme du vecteur $\vec{a}$:

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \geq 0 \tag{9}$$

5 Arc et courbure

Nous allons définir et calculer la courbure K et le rayon de courbure ρ en un point P d'une courbe paramétrée Γ.

Rappelons que sur un cercle de rayon R, la longueur ds de l'arc est donnée par $ds = Rd\gamma$.
Ainsi, le rayon du cercle est le quotient de la longueur de l'arc par la mesure de l'angle qui le sous-tend.

Pour une courbe générale, on définit le rayon de courbure $\rho(t)$ par la formule $ds = \rho(t)d\gamma$.
Le **rayon de courbure** $\rho(\mathbf{t})$ en P est:

$$\rho = \frac{ds}{d\gamma} \tag{10}$$

La **courbure K**(**t**) en P est:

$$K = \frac{d\gamma}{ds} \tag{11}$$

C'est le taux de variation instantané de l'angle γ par unité de longueur.
Cette notion est purement géométrique.
Ainsi définie, la courbure est une courbure signée. Elle peut être négative, nulle ou positive.

Nous allons établir une formule permettant de calculer $K(t)$ pour une courbe plane.
Soit $\gamma = \sphericalangle(\vec{i}, \vec{v})$. Alors

$$K = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{1}{v} = \frac{\dot{\gamma}}{v}$$

Comme

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j},\ on\, a\ \tan(\gamma) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Dérivons chaque membre par rapport à t:

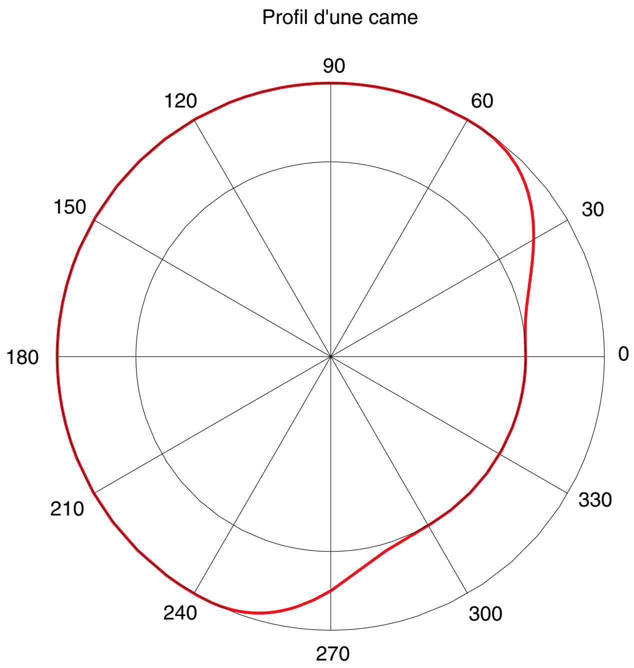
$$\dot{\gamma} \cdot (1 + \tan^2(\gamma)) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}$$

Comme

$$1 + \tan^2(\gamma) = 1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2}$$

On obtient:

$$\dot{\gamma} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$



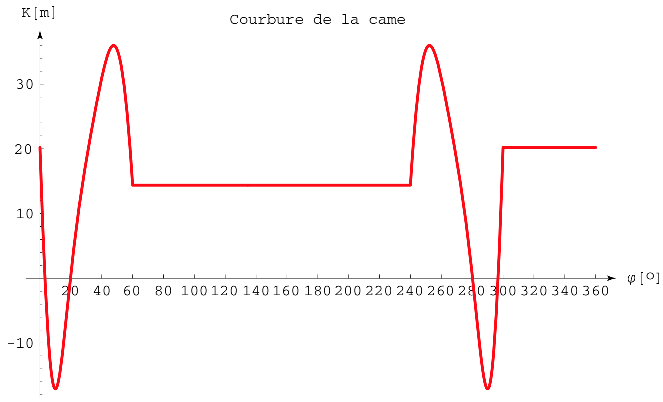


Figure 17: Courbure signée d'une came.

Et donc:

La courbure d'une courbe paramétrée plane

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

est donnée par:

$$K = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \tag{12}$$

La courbure d'une fonction explicite $y = y(x)$ est donnée par:

$$K = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} \tag{13}$$

Il suffit de prendre x pour paramètre et d'appliquer la formule précédente à la courbe paramétrée:

$$\begin{cases} x &= x \\ y &= y(x) \end{cases}$$

Remarques: On peut vérifier, à partir de la formule (12), que:

- La courbure est non nulle si l'accélération n'est pas parallèle à la vitesse (non nulle).
- La courbure est nulle si l'accélération est parallèle à la vitesse (non nulle).
- La courbure est indéterminée si la vitesse est nulle. Un tel point est en général un **point de rebroussement** et c'est le vecteur accélératon qui indique la droite tangente.
- Un point où la courbure change de signe est un **point d'inflexion**.

Le **centre de courbure** de la trajectoire en P est le point C de la normale positive situé à la distance ρ de P.
Le **cercle de courbure** est le cercle centré au centre de courbure et de rayon égal au rayon de courbure.
La courbe décrite par C lorsque P varie est la **courbe développée** de la courbe Γ.
Γ est alors la **développante** de la courbe décrite par C.
Les équations paramétriques de la développée sont données par les coordonnées du centre de courbure C:

$$\begin{cases} c_1(t) &= x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}} \\ \\ c_2(t) &= y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}} \end{cases} \tag{14}$$

Propriétés de la développée :

- La tangente à la développée en C est la normale à la courbe en P.
- La développée est tangente aux normales à la courbe, et est l'**enveloppe** de ses normales.

6 Accélérations tangentielle et normale

Nous allons définir les composantes intrinsèques, tangentielles et normales, de l'accélération.

Décomposons le vecteur $\vec{a}$ dans le plan osculateur selon les directions tangentielle et normale.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$\vec{a}_t$ est l'**accélération tangentielle** et $\vec{a}_n$ est l'**accélération normale**.

Ce sont les composantes intrinsèques de l'accélération, elles ne dépendent pas du choix du repère.

Pour les évaluer, introduisons les vecteurs unités $\vec{e}_t$ et $\vec{e}_n$:

- $\vec{e}_t$ est parallèle et de même sens à la tangente positive.
- $\vec{e}_n$ est parallèle de même sens que la normale positive n, il est dirigé vers le centre de courbure C.

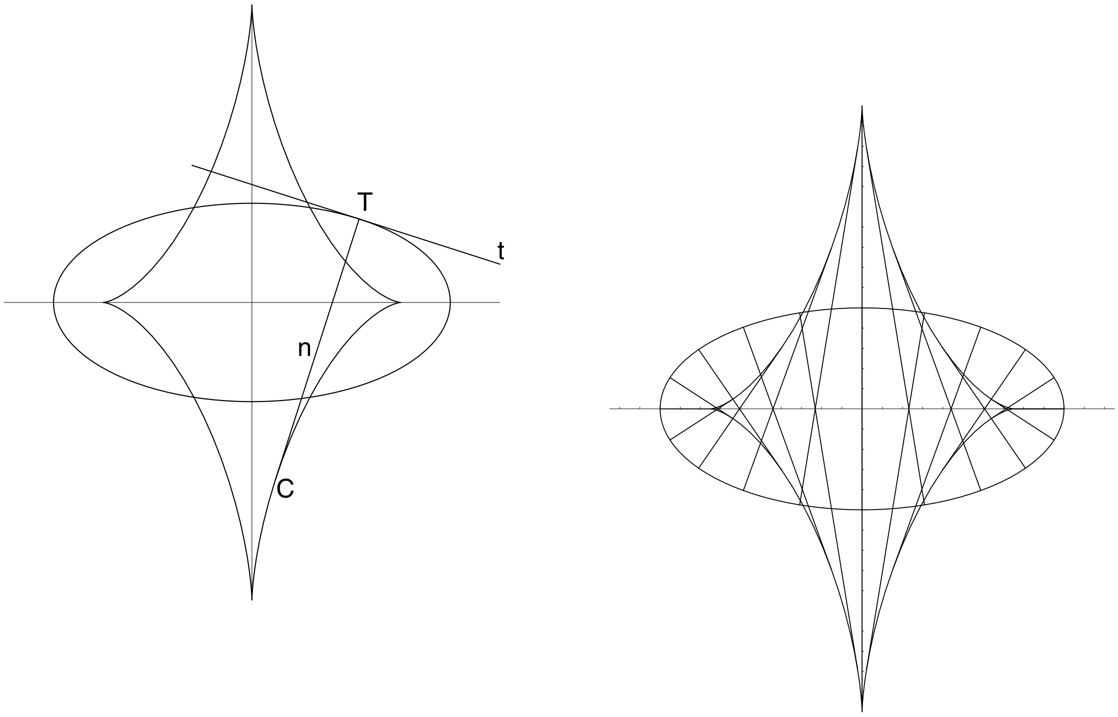


Figure 18: L'astroïde est la développée de l'ellipse. La normale n en T à l'ellipse est la tangente au centre de courbure C à l'astroïde.

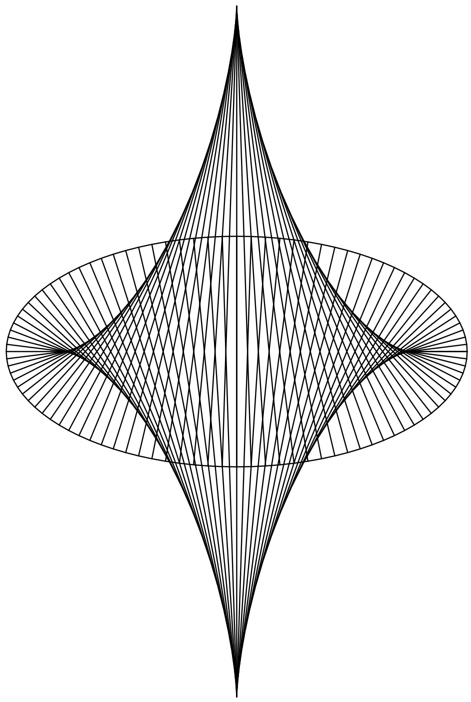


Figure 19: L'astroïde est l'enveloppe des normales à l'ellipse.

Le repère $(P, \vec{e}_t, \vec{e}_n)$ est orienté positivement (sens trigonométrique) si la courbure est positive et orienté négativement si la courbure est négative. C'est un repère orthonormé, qui varie en direction le long de la trajectoire.

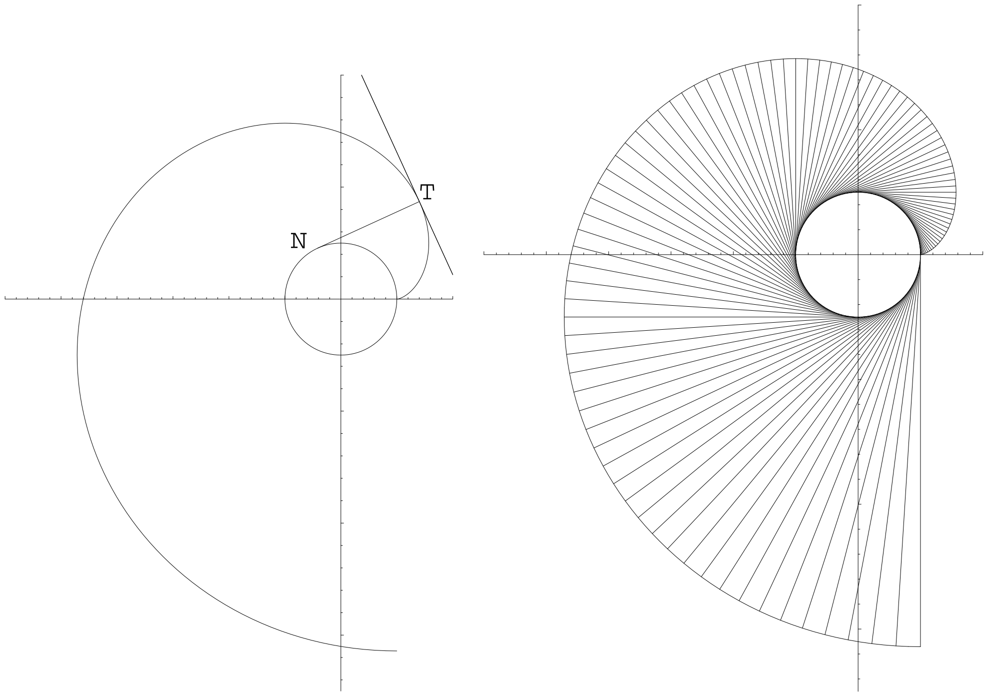


Figure 20: Développantes de cercle.

$$\vec{a} = a_t\,\vec{e}_t + a_n\,\vec{e}_n$$

Pour déterminer les composantes a_t et a_n, écrivons le vecteur vitesse sous la forme

$$\vec{v} = v\,\vec{e}_t$$

et dérivons:

$$\vec{a} = \frac{d(v\,\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

Il reste à calculer $\dfrac{d\vec{e}_t}{dt}$.
Il est parallèle à $\vec{e}_n$ et de même sens (Propriété (7) de la dérivée des vecteurs).
Pour un angle $\Delta\gamma$ petit, on a égale à

$$\|\Delta\vec{e}_t\| \approx \|\vec{e}_t\| \cdot |\Delta\gamma| = 1 \cdot |\Delta\gamma|$$

car $\vec{e}_t$ est un vecteur unitaire.
La formule (10) permet de relier $\Delta\gamma$ au rayon de courbure $\rho \cdot \Delta\gamma = \Delta s$ et :

$$\Delta\vec{e}_t = \|\Delta\vec{e}_t\|\,\vec{e}_n = |\Delta\gamma|\,\vec{e}_n = \frac{\Delta s}{|\rho|}\,\vec{e}_n$$

d'où

$$\frac{\Delta\vec{e}_t}{\Delta t} = \frac{1}{|\rho|}\frac{\Delta s}{\Delta t}\,\vec{e}_n$$

et

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{v}{|\rho|}\,\vec{e}_n$$

Ainsi

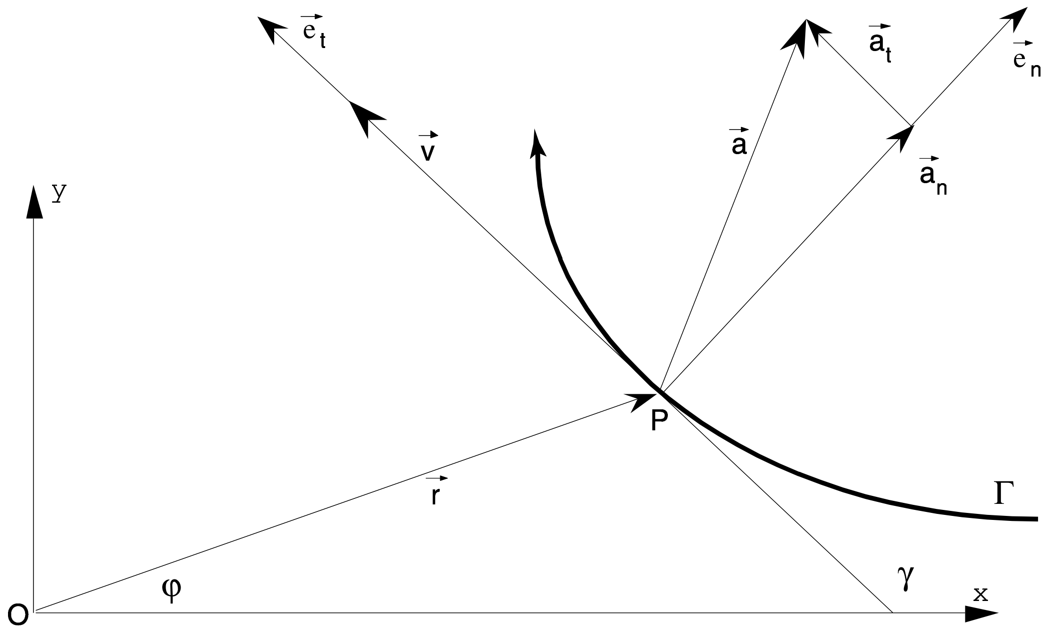


Figure 21: Décomposition du vecteur accélération en composantes tangentielle et normale.

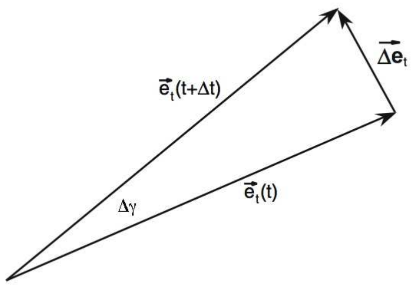


Figure 22: Vecteurs unitaires, l'arc est égal à l'angle.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{e}_t + \frac{v^2}{|\rho|}\,\vec{e}_n \tag{15}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \tag{16}$$

$$a_n = \frac{v^2}{|\rho|} \tag{17}$$

L'accélération tangentielle a_t mesure la variation de l'amplitude du vecteur vitesse.
Si

- a_t est positif, l'amplitude de la vitesse croît, le mouvement est accéléré,
- a_t est négatif, l'amplitude de la vitesse décroît, le mouvement est décéléré (retardé),
- a_t est nul, l'amplitude de la vitesse est constante, le mouvement est uniforme,
- a_t est constant, le mouvement est uniformément accéléré ou décéléré.

L'accélération normale a_n mesure la variation de la direction du vecteur vitesse.
La relation de Pythagore donne:

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2 \tag{18}$$

Attention: On peut très bien avoir $v(t_0) = 0$ et en même temps $\dot{v}(t_0) \neq 0$!

6.1 Courbure dans l'espace

La décomposition de l'accélération restant valable dans l'espace, nous pouvons en déduire une formule pour la courbure:
Multiplions la formule (15) vectoriellement à gauche par le vecteur $\vec{v}$:

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{v} \wedge \vec{e}_t + \frac{v^2}{|\rho|} \vec{v} \wedge \vec{e}_n$$

Mais $\vec{v} \wedge \vec{e}_t = \vec{0}$, car les vecteurs sont parallèles, ainsi:

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = \frac{v^2}{|\rho|} \vec{v} \wedge \vec{e}_n$$

En prenant les normes:

$$\|\vec{v} \wedge \vec{a}\| = \frac{v^2}{|\rho|} \|\vec{v} \wedge \vec{e}_n\| = \frac{v^3}{|\rho|}$$

Car $\vec{v}$ et $\vec{e}_n$ sont perpendiculaires.

Ainsi:

$$\boxed{K = \frac{\| \vec{v} \wedge \vec{a} \|}{v^3}} \tag{19}$$

La courbure est toujours positive. Il n'est pas possible de donner un signe à la courbure en dimension trois.

7 Coordonnées polaires

Nous allons exposer une nouvelle décomposition des vecteurs vitesse et accélération. Cette décomposition utilise les coordonnées polaires (pour les mouvements plan) et cylindrique (pour les mouvements spatiaux).

Considérons une courbe plane en coordonnées polaires:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} r & = & r(t) \\ \varphi & = & \varphi(t) \end{array} \right.$$

En chaque point P de la courbe, nous allons définir un repère orthonormé $P\,\vec{e}_r\,\vec{e}_\varphi$ indiquant une direction radiale $\vec{e}_r$ et une direction transverse $\vec{e}_\varphi$ à la courbe Γ.

Rappelons que:

- L'**angle polaire** φ(**t**) est l'angle entre l'axe polaire Ox et le vecteur position $\vec{r}(t)$.
- Le **rayon polaire r(t)** est la norme de $\vec{r}(t)$.

Le vecteur $\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$ est défini par:

$$\vec{r} = r\,\vec{e}_r \tag{20}$$

et le vecteur $\vec{\mathbf{e}}_{\varphi}$ complète alors le repère en un repère direct $P, \vec{e}_r\, \vec{e}_{\varphi}$.

Ce repère n'est pas intrinsèque à la courbe, il dépend du choix des coordonnées polaires.

Le vecteur vitesse va se décomposer dans ce repère:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_{\varphi} = v_r\,\vec{e}_r + v_{\varphi}\,\vec{e}_{\varphi}$$

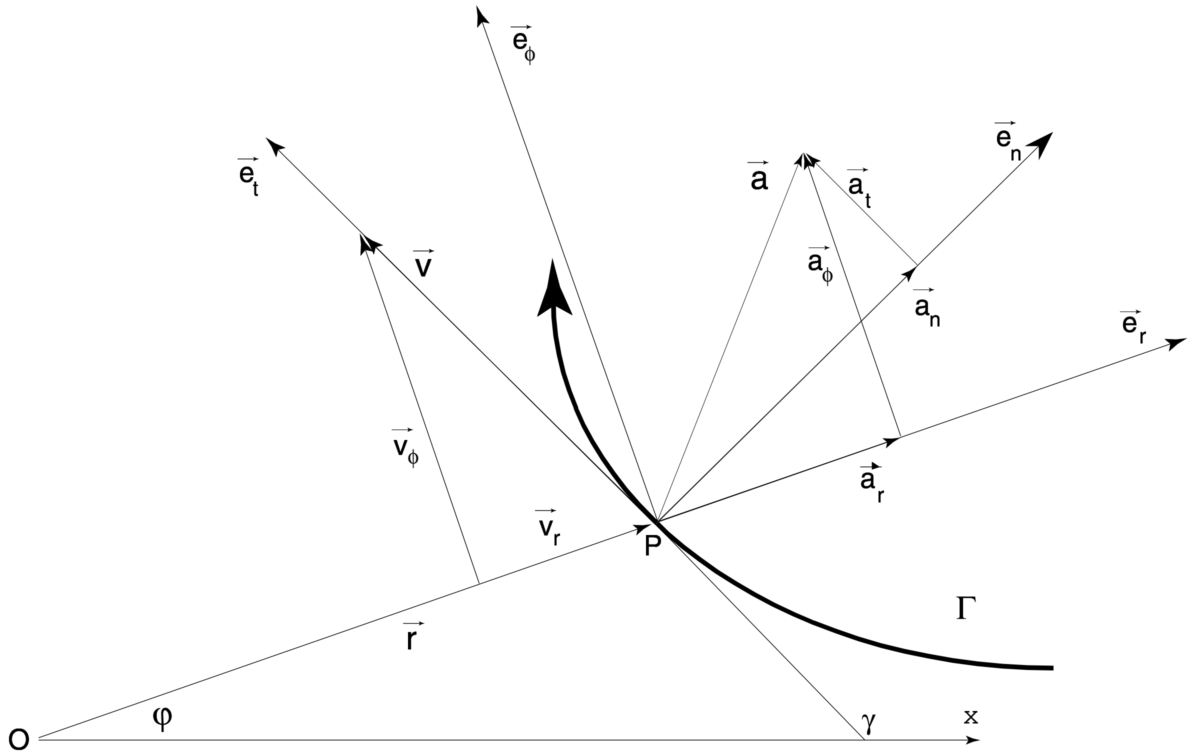


Figure 23: Décomposition du vecteur accélération en composantes radiale et transverse, tangentielle et normale.

Pour déterminer les composantes v_r et v_{φ}, dérivons l'égalité $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\vec{e}_r + r\,\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Pour calculer $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}$, remarquons que le vecteur $\Delta\vec{e}_r = \vec{e}_r(t + \Delta t) - \vec{e}_r(t)$ est un vecteur parallèle à $\vec{e}_{\varphi}$, de même sens, et de norme égale à $1 \cdot |\Delta\varphi|$, car $\vec{e}_r$ est un vecteur unitaire, voir Figure (22)

On a donc:

$$\Delta\vec{e}_r = \Delta\varphi\,\vec{e}_{\varphi}$$

d'où

$$\frac{\Delta\vec{e}_r}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\,\vec{e}_{\varphi}$$

et

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_{\varphi} = \omega\,\vec{e}_{\varphi} \tag{21}$$

De même

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_r = -\omega\,\vec{e}_r \tag{22}$$

Où $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ est la vitesse angulaire.

Ainsi, nous obtenons la décomposition de la vitesse:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\vec{e}_r + r\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi \tag{23}$$

v_r est la **composante radiale** de la vitesse, elle mesure la vitesse d'éloignement de P par rapport à l'origine O.
v_φ est la **composante transverse**, elle mesure la variation de direction de $\vec{r}$.

$$v_r = \frac{dr}{dt} \tag{24}$$

$$v_\varphi = r\,\frac{d\varphi}{dt} = r\,\omega \tag{25}$$

Et la grandeur de la vitesse:

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} \tag{26}$$

Pour trouver les composantes de l'accélération, il faut dériver la formule (23) en tenant compte des formules (21) et (22) et de la dérivée du double produit, après regroupement on arrive à:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\varphi = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\vec{e}_\varphi \tag{27}$$

a_r est la **composante radiale** de l'accélération et a_φ est la **composante transverse**.

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \ddot{r} - r\omega^2 \tag{28}$$

$$a_\varphi = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} \tag{29}$$

$\dot{\omega}$ est l'**accélération angulaire**.

7.1 Courbures en coordonnées polaires

La courbure d'une courbe plane $r = r(t)$ et $\varphi = \varphi(t)$ est:

$$K = \frac{r^2\dot{\varphi}^3 - r\ddot{r}\dot{\varphi} + 2\dot{r}^2\dot{\varphi} + r\dot{r}\ddot{\varphi}}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}} \tag{30}$$

La courbure d'une courbe plane $r = r(\varphi)$ est:

$$K = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \tag{31}$$

8 Mouvements plans et centre instantané de rotation

Nous allons définir et calculer le centre instantané de rotation d'un solide (figure) du plan π_2 en mouvement parallèlement à un plan fixe π_1.

Nous admettrons le résultat suivant:

Le mouvement d'une figure plane peut, à chaque instant, être assimilé à une rotation autour d'un point I, appelé **centre instantané de rotation CIR**.

Les vitesses des points P de la figure sont perpendiculaires aux rayons PI et sont proportionnelles à ces rayons.

Si on note $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ le vecteur représentant la rotation, alors:

Si P est un point **fixe** du solide, sa vitesse est donnée par:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IP} \tag{32}$$

Si P est un point **mobile** du solide de vitesse relative $\vec{v}_{rel}$, sa vitesse est donnée par:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IP} \tag{33}$$

<u>Construction du CIR:</u>

Il suffit de connaître les vecteurs vitesse $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ de deux points A et B du solide, car $IA \perp \vec{v}_A$ et $IB \perp \vec{v}_B$.

Si A et B sont deux points **fixes** du solide, leurs vitesses scalaires valent

$$v_A = \omega IA \tag{34}$$

et

$$v_B = \omega IB$$

On en déduit:

$$\frac{v_A}{IA} = \frac{v_B}{IB} \tag{35}$$

<u>Construction du vecteur vitesse de n'importe quel point B du solide:</u>

$\vec{v}_B \perp IB$ donne la direction de $\vec{v}_B$, la formule (35) permet de construire la longueur de $\vec{v}_B$.

<u>Calcul du CIR:</u>

Pour établir une formule, partons de l'équation (32) et multiplions-là vectoriellement par $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IP})$$

La formule de Gibbs donne alors:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P = (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{IP})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\overrightarrow{IP}$$

Comme

$$\vec{\omega} \perp \overrightarrow{IP}$$

On obtient:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P = -\omega^2 \, \overrightarrow{IP}$$

D'où

$$\overrightarrow{PI} = \frac{1}{\omega^2} \, \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P \tag{36}$$

Propriété du CIR:

Le point I est mobile par rapport à π_1 et à π_2, il a donc une vitesse absolue $\vec{v}_I$ et une vitesse relative $\vec{v}_{I_{rel}}$.
L'équation (33) donne:

$$\vec{v}_I = \vec{v}_{I_{rel}} \tag{37}$$

Le CIR a une vitesse d'entraînement nulle et sa vitesse relative est égale à sa vitesse absolue.

Lors du mouvement de π_2 sur π_1, le CIR décrit une courbe sur π_1 appelé la **base** et une autre courbe sur π_2 appelée la **roulante**.
La relation (37) indique que la roulante roule sans glisser sur la base.

A un instant t donné, le point I est un point géométrique (c'est-à-dire non lié aux plans π_2 ou π_1).
Il est superposé à un point physique I_1 du plan π_1 et à un point physique I_2 du plan π_2.
Dans notre cas le point I_1 est fixe, mais le point I_2, lui décrit une courbe dans le plan π_1.

En général, si un solide roule sur un autre solide avec un contact au point géométrique K, les vitesses relative et absolue de K ne sont pas les mêmes:

$$\vec{v}_K \neq \vec{v}_{K_{rel}} \tag{38}$$

Le roulement se fait avec glissement et la **vitesse de glissement** au point de contact K est alors égale à la vitesse d'entraînement de K:

$$\vec{v}_{gliss} = \vec{v}_{ent} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IK} \tag{39}$$

Les deux courbes engendrées par le point de contact K dans les plans π_1 et π_2 sont appelées **profils conjugués** et le point K est le point **caractéristique**.

9 Exercices

Exercice 1 (Mouvement linéaire)

- *Supposons que*

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{o}$$

Démontrer que

$$\vec{r} = \vec{v}_0\, t + \vec{r}_0$$

Que peut-on dire de ce mouvement?

- *Soit $\vec{a}$ un vecteur constant.*

Supposons que

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$$

Démontrer que

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\,\vec{a}\, t^2 + \vec{v}_0\, t + \vec{r}_0$$

Que peut-on dire de ce mouvement?

Exercice 2 (Croisée)

Pour illustrer la non-propriété (6), étudions le problème suivant:
Deux véhicules P_1 et P_2 roulent sur les axes Ox et Oy respectivement. Leurs vitesses sont des constante positives v_1 et v_2
Au temps $t = 0$, P_1 est en O et P_2 est à la distance r_0 de P_1.

1. *Calculer les vecteurs position $\vec{r_1} = \overrightarrow{OP}_1$, $\vec{r_2} = \overrightarrow{OP}_2$ des deux véhicules.*
2. *Calculer leurs vecteurs vitesse $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$.*
3. *Calculer le vecteur $\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$, différence des vecteurs vitesses, qui donne leur vitesse relative.*
4. *Calculer son amplitude v.*
5. *La différence des vecteurs position $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ donne l'éloignement des deux véhicules, calculer son amplitude r.*
6. *La dérivée $\dfrac{dr}{dt}$ donne la vitesse d'éloignement des deux véhicules. Calculer-la.*
7. *Est-il possible que celle-ci soit égale à v?*

Exercice 3 (Mouvement circulaire)

Refaire les calculs donnés dans l'exemple du cours et vérifier les différentes affirmations.

Exercice 4 (Projectile)

La trajectoire d'un projectile est donnée par les lois de la dynamique.
Supposons que la rotation de la terre soit négligée, le mouvement est alors plan.
De plus, supposons que le projectile n'aille pas trop haut ($\vec{g}$ constant en amplitude) et qu'il ne va pas trop loin ($\vec{g}$ constant en direction).
Alors le mouvement est donné par $m\,\ddot{\vec{r}} = -m\,\vec{g}$, dans un système d'axes dirigé vers le haut.

1. *Montrer, en posant $\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}$ et en résolvant les équations différentielles, que:*

$$\vec{r}(t) = (\alpha t + c_1)\vec{i} + (-\frac{1}{2}gt^2 + \beta t + c_2)\vec{j}$$

où α, β et c_1, c_2 sont des constantes d'intégration.

2. *On suppose que la position au temps $t = 0$ est donnée par $\vec{r}(0) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$.*

   Prouver que $c_1 = x_0$ et que $c_2 = y_0$.

3. *On suppose qu'au temps $t = 0$, le projectile est lancé avec une vitesse d'amplitude V_0 sous un angle θ_0 avec l'horizontale. Prouver que $\alpha = V_0 \cos(\theta_0)$ et que $\beta = V_0 sin(\theta_0)$.*

4. *En déduire les équations paramétriques de la trajectoire:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \alpha t \\ y(t) & = & -\frac{1}{2}gt^2 + \beta t \end{array} \right\}$$

5. *En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire:*

$$y = \frac{x}{\alpha}\,(\beta - \frac{g}{2\alpha}\,x)$$

6. *Calculer la portée et le temps correspondant.*

7. *Calculer la hauteur maximale et le temps correspondant.*

8. *Calculer le vecteur vitesse et sa valeur au temps $t = 0$.*

9. *Calculer le vecteur accélération et décomposer-le en composantes tangentielle et normale.*

10. *Prouver que la courbure est donnée par la formule:*

$$K = -\frac{g\alpha}{(\alpha^2 + (\beta - gt)^2)^{3/2}}$$

11. *Calculer l'équation de l'enveloppe des paraboles de tir (θ_0 variable).*

Exercice 5 (Mouvement cycloïdal)

1. *Refaire les calculs donnés dans l'exemple du cours et vérifier les différentes affirmations.*

2. *Calculer l'accélération dans le cas où la vitesse angulaire n'est pas constante.*

   Etablir que le vecteur accélération se décompose $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ avec une composante tangentielle $\vec{a}_1$. Est-ce la décomposition en composantes tangentielle et normale?

3. *Est-il possible que la vitesse d'un point soit nulle à un certain moment?*

4. *Est-il possible qu'un point recule lors de l'avancement de la roue?*

5. *Est-il possible que la courbure $K = 1/\rho$ soit nulle?*

6. *Calculer les valeurs extrêmes de la courbure et faire un graphique de $K(\alpha)$.*

7. *Calculer les valeurs extrêmes de l'accélération normale et tangentielle et représenter sur le même graphique $a(\alpha)$, $a_t(\alpha)$ et $a_n(\alpha)$.*

Exercice 6 (Ellipse)

Voici les équations paramétriques de l'ellipse:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(\phi) & = & a\,\cos(\phi) \\ y(\phi) & = & b\,\sin(\phi) \end{array} \right.$$

1. *Calculer la courbure en un point quelconque de la courbe et les valeurs extrêmes de celle-ci: ce sont les courbures principales.*

2. *Donner les équations paramétriques de la développée de l'ellipse. Simplifier le résultat.*

3. *Poser a = 2 et b = 1.*

   (a) *Dessiner la courbure en fonction de ϕ.*

   (b) *Dessiner l'ellipse et sa développée en fonction de ϕ.*

Exercice 7 (Barre)
Etablir les formules données en exemple, en particulier les accélérations et les équations de l'enveloppe.

Exercice 8 (Bielle)
On note M le point milieu de la bielle, r le rayon de la manivelle et L la longueur de la bielle.
A l'aide d'un logiciel de calcul:

1. *Calculer les vecteurs position, vitesse, accélération, accélération tangentielle, accélération normale des points A, B et M en fonction de l'angle α de rotation de la manivelle, la vitesse angulaire ω étant constante.*

2. *Superposer les graphes des normes des accélérations $a = a(\alpha), a_t = a_t(\alpha), a_n = a_n(\alpha)$.*

Exercice 9 (Mouvement hélicoïdal)
Nous allons maintenant étudier un mouvement hélicoïdal, voir figure (24).
Celui-ci se décompose en un mouvement circulaire et un mouvement rectiligne.
Le point P décrit une hélice, sa projection Q sur le plan Oxy décrit un cercle de rayon R et sa projection M sur l'axe Oz décrit une droite.

$$\vec{r}_P(\alpha) = \vec{r}_Q(\alpha) + \vec{r}_M(\alpha) = R\cos(\alpha)\,\vec{i} + R\sin(\alpha)\,\vec{j} + h\,\alpha\,\vec{k}$$

où $\alpha = \alpha(t)$ et R, h sont des constantes positives.

$$h = \frac{p}{2\pi}$$

p est le pas et h le pas réduit.

1. *Vérifier que le pas est donné par $p = \|\vec{r}_P(\alpha + 2\pi) - \vec{r}_P(\alpha)\|$.*

2. *Calculer les vecteurs position, vitesse et accélération et leurs normes.*

3. *Calculer la décomposition de l'accélération.*

4. *Indiquer la position de ces vecteurs.*

5. *Calculer la pente du vecteur vitesse.*

6. *Traiter le cas particulier où ω est constante.*

7. *Calculer la courbure de l'hélice.*

8. *Introduire le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$ et vérifier qu'en tout point P:*

$$\vec{v}_P = \vec{v}_M + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MP}$$

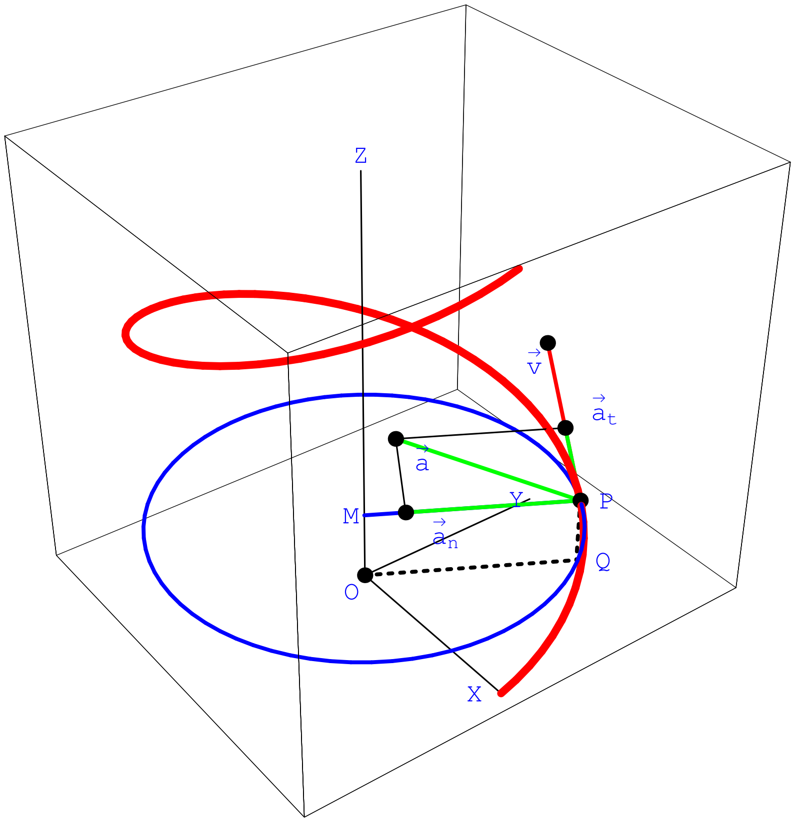


Figure 24: Hélice avec décomposition de l'accélération.