heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Equations différentielles exercices

Version 2013

Lang Fred

1 Exercices

Exercice 1
Trouver la solution générale de

$$y'(t) + 2\,t\,y(t) = 0$$

Exercice 2
Résoudre l'EDO

$$y'(t) + a\,y(t) = 0$$

où a est une constante.

Exercice 3
Résoudre le problème à valeurs initiales

$$y'(t) + \sin(t)\,y(t) = 0\,,\ y(0) = \frac{3}{2}$$

Exercice 4
Trouver la solution générale de l'EDO

$$y'(t) + 2\,t\,y = t$$

Exercice 5
Résoudre le problème à valeurs initiales

$$y'(t) + 2\,t\,y = t\,,\ y(1) = 2$$

Exercice 6
Trouver la solution particulière de l'équation

$$y'(t) + y(t) - t - t^3 = 0$$

vérifiant

$$y(1) = 1$$

en déterminant la constante C de la solution générale.

Exercice 7
Trouver la solution générale de l'EDO

$$y'(t) = \frac{t^2}{y(t)^2}$$

Exercice 8
Trouver la solution générale de l'équation

$$y'(t) = 1 + y(t)^2$$

Remarquer qu'on passe d'une solution à une autre par une translation horizontale.
Que doit valoir la constante d'intégration pour que la courbe passe par le point (t_0, y_0)*?*
Déterminer la solution particulière vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.
Quel est le domaine de définition de cette solution?

Exercice 9
Résoudre le problème à valeurs initiales

$$(1 + e^{y(t)})\, y'(t) = \cos(t) \quad , \quad y(\pi/2) = 3$$

Faire un dessin de celle-ci. (Calculatrice ou ordinateur)

Exercice 10
Trouver la solution générale de l'EDO

$$(1 + x)\, y\, dx + (1 - y)\, x\, dy = 0$$

Faire un dessin de celle-ci en variant la constante de -5 à 5. (Calculatrice ou ordinateur)

Exercice 11

$$P\, v = R\, T$$

est la loi des gaz parfaits.
$R = 8.3144$ *Joule/Kelvin/Mole est la constante des gaz parfaits.*

- *Dessiner dans le système d'axes* OvP, *la famille de courbes* $Pv = RT$, *paramètre* T.
- *Dessiner dans le système d'axes* OvT, *la famille de courbes* $Pv = RT$, *paramètre* P.
- *Dessiner dans le système d'axes* OPT, *la famille de courbes* $Pv = RT$, *paramètre* v.

Exercice 12
Etablir l'EDO ayant pour solution générale $Pv = RT$, R *constante,* T *paramètre,* V *variable,* P *fonction.*
Puis résoudre l'EDO obtenue et retrouver la loi des gaz parfaits.

Exercice 13
Déterminer les trajectoires orthogonales à la famille de d'hyperboles $y^2 - x^2 = C$. *Quelles sont ces courbes? Déterminer une courbe de chaque famille passant par le point* $P(1; 2)$ *et vérifier qu'elles se coupent à angle droit.*

Exercice 14
Déterminer les trajectoires orthogonales à la famille de courbes $y = e^{C\,x}$.
Déterminer une courbe de chaque famille passant par le point $P(1; 2)$.

Exercice 15
Résoudre l'EDO du problème de la saumure.

1. *avec des valeurs littérales et numériques* $d_e = d_s$.
2. *avec des valeurs littérales et numériques* $d_s = 0$.

3. *avec des valeurs littérales et numériques $d_e \neq d_s$.*

   Indication: Faire un changement de variable:

$$m(t) = M(t) + (V_0 + \delta t)c_e$$

Exercice 16

Un circuit électrique se compose d'une résistance R et d'une inductance L connectée en série avec une tension constante V. Si au moment $t = 0$, l'interrupteur est fermé, l'un des lois de Kirchhoff implique que, pour $t > 0$, le courant $I = I(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V$$

Exprimer I en fonction de t.

Exercice 17

Un objet de masse m est lâché d'une certaine hauteur.
La distance parcourue par la balle en fonction du temps est $x = x(t)$, avec $x(0) = 0$.
Plaçons un axe vertical dirigé vers le bas dont l'origine coïncide avec le point de départ du lâcher.
Déterminer sa vitesse $v = v(t)$ dans les trois cas suivants:

1. *Il n'y a pas de frottement:*
$$\frac{dv}{dt} = g$$
2. *Le frottement est proportionnel à v:*
$$\frac{dv}{dt} = g - k_1 v$$
3. *Le frottement est proportionnel à v^2:*
$$\frac{dv}{dt} = g - k_2 v^2$$
4. *Vers quelle valeur limite tend $v(t)$ lorsque $t \to \infty$?*
5. *Prendre les valeurs numériques $k_1 = 0.001$ [1/s] ; $k_2 = 0.001$ [1/m] ; $g = 9.81$ $[m/s^2]$. Dessiner les courbes $v = v(t)$ sur le même graphe pour $0 \leq t \leq 30s$ et pour $0 \leq t \leq 4000s$.*

Exercice 18

Considérons un pont formé par un câble flexible fixé aux deux extrémités sur lequel une route est suspendue (figure 1). Soit ω le poids (constant) par unité de longueur de la route [kg/m] et H la tension(constante) horizontale du câble [N].
Si on néglige le poids du câble, trouver l'équation de la courbe décrite par le câble.

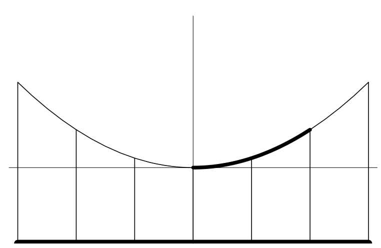

Figure 1: Pont suspendu

Exercice 19
Une courbe $y = f(x)$ *est telle que la pente en tout point* $P(x;y)$ *est le double de l'aire du rectangle* OP_1PP_2*, où* $P_1(x;0)$ *et* $P_2(0,y)$*.*
Etablir une EDO de ces courbes.
Déterminer la courbe passant par le point $(2;2)$*.*

Exercice 20
Trouver la solution générale de

$$y'' - y' = 0$$

Exercice 21
Trouver la solution générale de

$$y'' - y = 0$$

Exercice 22
Trouver la solution du problème à valeurs initiales:

$$y'' + 4y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 2$$

Exercice 23
Trouver la solution générale de

$$y'' + 5y' + 4y = 0$$

Exercice 24
Trouver la solution du problème à valeurs initiales:

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 3$$

Exercice 25
Trouver la solution du problème à valeurs initiales:

$$y'' + 2y' + 4y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$$

Exercice 26
Trouver la solution générale de

$$y'' + 4y = 0$$

Exercice 27
Trouver la solution générale de

$$y'' + 4y = t$$

en devinant une solution particulière y_0*.*

Exercice 28
Trouver la solution générale de

$$y'' - 2y' + 2y = t^2$$

ainsi que la solution particulière vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$*.*

Exercice 29
Trouver la solution générale de

$$y'' = t^4 e^{3t}$$

ainsi que la solution particulière vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$*.*

Exercice 30
Trouver la solution générale de

$$y'' - 2y' + y = t^2$$

Exercice 31
Trouver la solution générale de

$$y'' - 2y' - 3y = t^2$$

Exercice 32
Trouver la solution générale de

$$y'' - 2y' - 3y = t^2\, e^{3t}$$

Exercice 33
Trouver la solution générale de

$$y'' - 2y' - 3y = t^2\, e^{3t}\, \cos(t)$$

Exercice 34
Trouver la solution générale de

$$y'' - 2y' + 2y = t^2\, e^{t}\, \cos(t)$$

Exercice 35
Trouver la solution générale de

$$y'' - 2y' + y = e^t$$

Exercice 36
Remplir le tableau suivant:

EDO	*Racines r*	*Exposant k*	*Postulat*
$y'' - 3y' + 2y = 1$			
$y'' - 3y' + 2y = t$			
$y'' - 3y' + 2y = e^t$			
$y'' - 3y' + 2y = t\, e^t$			
$y'' - 3y' + 2y = \sin(t)$			
$y'' - 3y' + 2y = e^t \sin(t)$			
$y'' - 3y' + 2y = t\, e^t \sin(t)$			
$y'' - y' = 1$			
$y'' - y' = t$			
$y'' - y' = e^t$			
$y'' - y' = t\, e^t$			

EDO	*Racines r*	*Exposant k*	*Postulat*
$y'' - y' = \sin(t)$			
$y'' - y' = e^t \sin(t)$			
$y'' - y' = t\, e^t \sin(t)$			
$y'' - 2y' + y = 1$			
$y'' - 2y' + y = t$			
$y'' - 2y' + y = e^t$			
$y'' - 2y' + y = t\, e^t$			
$y'' - 2y' + y = \sin(t)$			
$y'' - 2y' + y = e^t \sin(t)$			
$y'' - 2y' + y = t\, e^t \sin(t)$			
$y'' + y = 1$			
$y'' + y = t$			
$y'' + y = e^t$			
$y'' + y = t\, e^t$			
$y'' + y = \sin(t)$			
$y'' + y = e^t \sin(t)$			
$y'' - 2y' + y = t\, e^t \sin(t)$			
$y'' - 2y' + 2y = t\, e^t \sin(t)$			

Exercice 37
Trouver la solution générale de

$$y'' + y = \cos(t) + \cos(2t)$$

Exercice 38
Trouver la solution particulière de

$$y'''' - y' = t$$

vérifiant les conditions initiales

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1 \qquad y''(0) = 0 \qquad y'''(0) = 0$$

Exercice 39
Trouver la solution générale de
$$y''' + y' = t\sin(t)$$
en complexifiant l'équation différentielle.

Exercice 40
Trouver la solution générale de
$$y''' - y' = t$$

Exercice 41
Trouver la solution générale de
$$y''' - y' = e^t$$

Exercice 42
Trouver la solution générale de
$$y'''' + 2y'' + y = \sin(t)$$
en complexifiant l'équation différentielle.

Exercice 43
Trouver la solution générale de
$$y'''' + y'' = t^2$$

Exercice 44
Trouver la solution générale de
$$y'' + y = \cos(\omega t)$$
Discuter selon les valeurs de ω.

Exercice 45
Trouver la solution générale de
$$y' = \cos(\omega t)$$
Discuter selon les valeurs de ω.

Exercice 46
Trouver la solution générale de
$$y' + y = e^{-\alpha t}$$
Discuter selon les valeurs de α.

Exercice 47
Trouver la solution générale de
$$y' + y = e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$$
Discuter selon les valeurs de α *et de* ω.

Exercice 48
Donner une solution particulière de l'équation différentielle
$$u''(t) + u'(t) + 12u(t) = 2\sin(4t)$$
sous la forme $u_p(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ *avec* $A > 0$ *et* $\phi \in]-\pi, \pi]$.

2 Corrigés

Corrigé ex 1

$$\boldsymbol{y(t) = C\, e^{-t^2}}$$

Corrigé ex 2

$$\boldsymbol{y(t) = C\, e^{-a\, t}}$$

Corrigé ex 3

$$\boldsymbol{y(t) = \frac{3}{2}\, e^{\cos(t)-1}}$$

Corrigé ex 4
La solution générale a déjà été calculée.
Pour trouver une solution particulière, on postule que

$$y(t) = K$$

est constant. On obtient alors

$$0 + 2\, t\, K = t \;\Rightarrow\; K = \frac{1}{2}$$

Ainsi, la solution générale de l'EDO est

$$\boldsymbol{y(t) = C\, e^{-t^2} + \frac{1}{2}}$$

Corrigé ex 5
Il s'agit de déterminer la constante pour que la condition initiale soit vérifiée.

$$y(1) = C\, e^{-1} + \frac{1}{2} = 2$$

D'où

$$C = \frac{3}{2}\, e$$

et la solution cherchée:

$$\boldsymbol{y(t) = \frac{3}{2}\, e^{1-t^2} + \frac{1}{2}}$$

Corrigé ex 6

$$\boldsymbol{y(t) = 3\, e^{1-t} + t^3 - 3t^2 + 7t - 7}$$

Corrigé ex 7

$$\boldsymbol{y(t) = \sqrt[3]{t^3 + 3C}}$$

Corrigé ex 8

$$\boldsymbol{y(t) = \tan(t + C)}$$

La courbe passe par le point (t_0, y_0) *si*

$$y_0 = \tan(t_0 + C)$$

donc

$$C = \arctan(y_0) - t_0$$

Pour vérifier la condition initiale $y(0) = 0$*, il faut que* $C = 0$*, la solution est donc*

$$\boldsymbol{y(t) = \tan(t)}$$

Elle est définie si

$$t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Corrigé ex 9
En séparant les variables, on obtient

$$(1 + e^y)\, dy = \cos(t)\, dt$$

qui s'intègre en

$$\boldsymbol{(y + e^y) = \sin(t)\ + C}$$

La condition initiale implique

$$C = 2 + e^3$$

donc la solution est donnée sous forme implicite par

$$\boldsymbol{(y + e^y) = \sin(t)\ + 2 + e^3}$$

Pour dessiner une telle courbe, deux possibilités:

- *Expliciter* t *en fonction de* y *et représenter* $t = t(y)$
- *Dessiner la courbe de manière implicite (ImplicitPlot dans Mathematica), le graphe est visible sur la figure (2).*

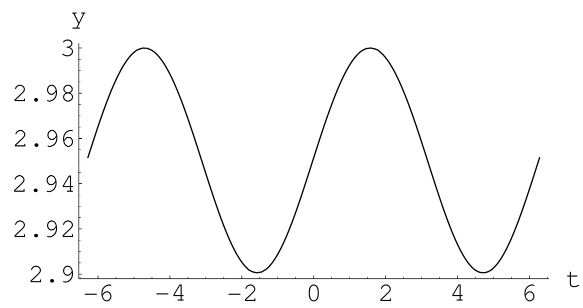

Figure 2: Graphe de la courbe implicite $(y + e^y) = \sin(t) + 2 + e^3$.

Corrigé ex 10

On trouve la solution implicite

$$\boldsymbol{\ln(x\,y) + x - y + C = 0}$$

dont le graphe est visible sur la figure (3).

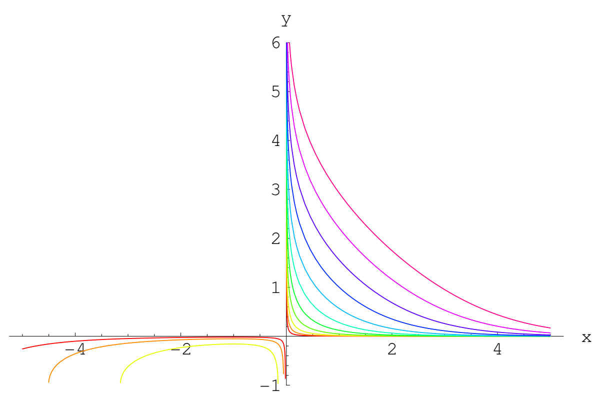

Figure 3: Graphe de la courbe implicite $\ln(x\,y) + x - y + C = 0$, C variant de -5 à 5.

Corrigé ex 11

- *Ce sont des* **hyperboles équilatères**.
- *Ce sont des* **droites par l'origine**.
- *Ce sont des* **droites par l'origine**.

Corrigé ex 12

La dérivée par rapport à v *de* $Pv = RT$, *donne*

$$P'\,v + P = 0 \Leftrightarrow \frac{dP}{dv}\,v = -P \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{dv}{v} \Leftrightarrow \ln(P) = -\ln(v) + \ln(C) \Leftrightarrow \ln(P) = \ln\left(\frac{C}{v}\right) \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{P\,v = C}$$

Corrigé ex 13

- *Il faut tout d'abord établir l'EDO de la famille de courbes données:*

  Dérivons par rapport à x l'équation
$$y^2 - x^2 = C$$
  on obtient
$$2\,y\,y' - 2x = 0$$
  ce qui est l'EDO cherchée, car la constante n'y figure plus.

- *Remplaçons y' par $-\frac{1}{y'}$, on obtient l'EDO de la famille de courbes orthogonales*
$$2y \cdot \left(-\frac{1}{y'}\right) - 2x = 0$$

- *Introduisons la notation différentielle, séparons les variables et intégrons l'EDO obtenue:*
$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \Leftrightarrow \ln(x) = -\ln(y) + \ln(K) \Leftrightarrow \boldsymbol{x\,y = K}$$
  Ce sont également des hyperboles équilatères, tournées de 45° par rapport aux précédentes. Le graphe est visible sur la figure (4).

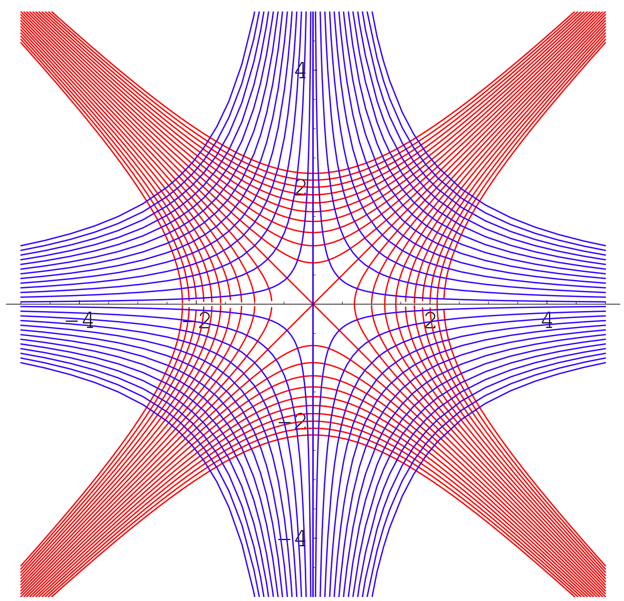

Figure 4: Deux familles d'hyperboles orthogonales.

- *En substituant les coordonnées de P, on obtient $C = 3$ et $K = 2$.*

- *La pente, au point P, à la première famille est $\frac{1}{2}$ et à la seconde -2.*

  Leur produit vaut bien -1.

Corrigé ex 14

- *EDO de la famille de courbes données:*

  Dérivons, par rapport à x, l'équation $y = e^{C\,x}$.

On obtient $y' = C\, e^{C\,x}$.

Il faut éliminer la constante C *de ces deux équations.*

Pour cela, on quotiente celles-ci membre à membre, on trouve

$$C = \frac{y'}{y}$$

on remplace cette valeur dans l'équation de départ, on obtient:

$$y = e^{\frac{y'}{y}\,x} \Leftrightarrow y\ \ln(y) = y'\ x$$

- *Remplaçons* y' *par* $-\frac{1}{y'}$*:*

$$y\ \ln(y) = -\frac{x}{y'} \Leftrightarrow y\ \ln(y)\,dy = -x\,dx$$

- *Intégrons l'EDO obtenue:*

$$\frac{1}{2}\,y^2\ \ln(y) - \frac{1}{4}\,y^2 = -\frac{1}{2}\,x^2\ + K_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{y^2(2\ln(y) - 1) + 2x^2 + K = 0}$$

Les courbes solutions sont ainsi données sous forme implicite.

- *Les solutions particulières cherchées admettent les constantes*

$$\boldsymbol{C = \ln(2)}$$

pour la première famille et

$$\boldsymbol{K = -2 - 4(2\ln(2) - 1)}$$

pour la seconde.

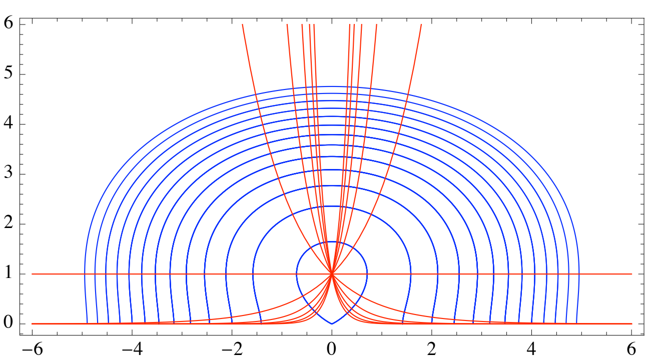

Figure 5: Trajectoires orthogonales aux exponentielles.

Corrigé ex 15 (saumure)

Cest une EDO linéaire inhomogène:

$$m'(t) + \frac{d_s}{V_0 + \delta \cdot t}\,m(t) = d_e\,c_e$$

1. $d_e = d_s \Rightarrow \delta = 0$:

   On peut directement séparer les variables, on obtient:

$$\boldsymbol{m(t) = c_e V_0 + (m_0 - c_e V_0)\, e^{-\frac{d_e\, t}{V_0}}}$$

   Remarquons, que lorsque $t \to \infty$, $m \to c_e V_0$.

   Avec les valeurs numériques: $d_s = d_e = 5\, l/min$, *on trouve:*

$$\boldsymbol{m(t) = 10 + 10\, e^{-t/20}}$$

2. $d_s = 0$: *On arrive à*

$$\boldsymbol{m(t) = m_0 + c_e\, d_e\, t}$$

$$\boldsymbol{m(t) = 20 + 0,5\, t}$$

3. *Ici les variables ne sont pas séparables immédiatement, le truc est de faire un changement de variable:*

$$m(t) = M(t) + (V_0 + \delta \cdot t)c_e$$

$$m'(t) = M'(t) + \delta \cdot c_e$$

   Avec la nouvelle variable, l'équation différentielle devient à variables séparables:

$$M' + \frac{d_s}{V_0 + \delta \cdot t}\, M = 0$$

   Dont la solution est

$$M = C\, (V_0 + \delta \cdot t)^{-\frac{d_s}{\delta}}$$

   En revenant à la variable initiale:

$$\boldsymbol{m(t) = V_0^{\frac{d_s}{\delta}}\, (m_0 - c_e V_0)(V_0 + \delta \cdot t)^{-\frac{d_s}{\delta}} + c_e(V_0 + \delta \cdot t)}$$

   Pour le cas numérique:

$$\boldsymbol{m(t) = 10 + 0,2\, t + 10^4\, (100 + 2\, t)^{-3/2}}$$

Corrigé ex 16

L'EDO

$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I = V$$

est une équation linéaire inhomogène, l'équation homogène associée est

$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I = 0$$

qu'on résout en séparant les variables:

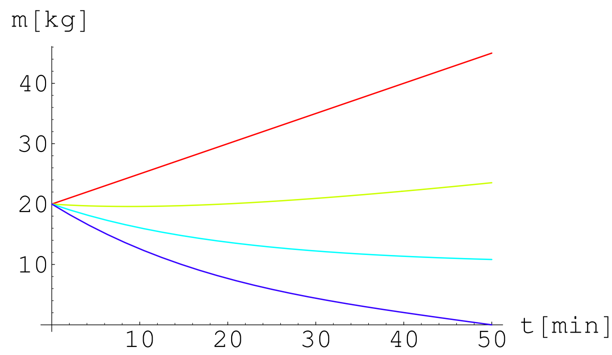

Figure 6: Masse de saumure pour $d_e = 5\, l/min$ et $d_s = 0, 3, 5, 7\, l/min$

$$L\frac{dI}{dt} + R\,I = 0 \Leftrightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\,dt \Leftrightarrow \ln(I) + \ln(C_1) = -\frac{R}{L}\,t \Leftrightarrow C_1\,I = e^{-\frac{R}{L}\,t} \Leftrightarrow I = C\,e^{-\frac{R}{L}\,t}$$

Une solution particulière $y_0(t)$ sera trouve en postulant que

$$y_0(t) = K$$

est constant.

$$L \cdot 0 + R \cdot K = V \Rightarrow K = V/R$$

D'où la solution générale

$$\boldsymbol{I(t) = C\,e^{-\frac{R}{L}\,t} + \frac{V}{R}}$$

La constante C est déterminée par la condition initiale $I(0) = 0$:

$$0 = C \cdot 1 + \frac{V}{R} \Rightarrow C = -\frac{V}{R}$$

et

$$\boldsymbol{I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}\,t})}$$

Corrigé ex 17

1.

$$\boldsymbol{v_1(t) = g\,t}$$

2.

$$\boldsymbol{v_2(t) = \frac{g}{k_1}(1 - e^{-k_1\,t})}$$

3.

$$\boldsymbol{v_3(t) = \sqrt{\frac{g}{k_2}}\ th\left(\sqrt{g\,k_2}\,t\right)}$$

4.

$$\boldsymbol{v_1(t) \to \infty \qquad v_2(t) \to \frac{g}{k_1} \qquad v_3(t) \to \sqrt{\frac{g}{k_2}}}$$

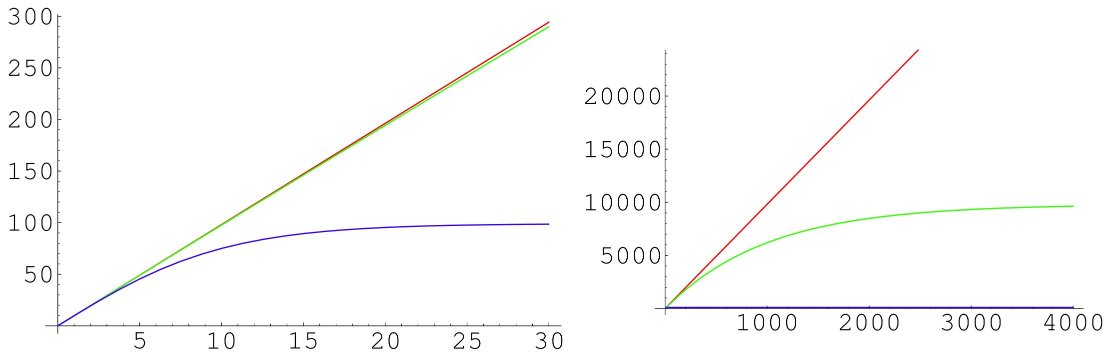

Figure 7: Chutes d'un corps avec ou sans frottements.

5. *Les graphes sont sur les figures 7.*

Corrigé ex 18

Notons $M(x, y)$ un point variable (figure 8) du câble, $\overrightarrow{P}$ le poids du morceau de pont AM, $\overrightarrow{T}$ la tension en M et $\overrightarrow{H}$ la tension en A.

L'équilibre du morceau de pont de A à M donne

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{H} = \overrightarrow{O}$$

Soit θ l'angle que fait la tangente en M avec l'axe Ox, T et H les normes des vecteurs $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{H}$.

En composantes:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\omega x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -H \\ 0 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où $H = T\cos(\theta)$ et $\omega x = T\sin(\theta)$.
On a alors l'EDO cherchée:

$$y' = \tan(\theta) = \frac{T\sin(\theta)}{T\cos(\theta)} = \frac{\omega x}{H}$$

qui s'intègre en

$$y = \frac{\omega}{2H}x^2 + C$$

La condition initiale $y(0) = 0$ donne $C = 0$ d'où la solution

$$\boldsymbol{y = \frac{\omega}{2H}x^2}$$

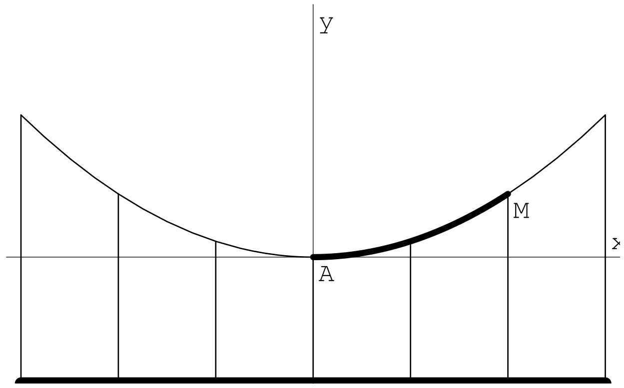

Figure 8: Pont suspendu

Corrigé ex 19
L'EDO cherchée est à variables séparables

$$y' = 2xy \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2x dx \Leftrightarrow \ln(C_1 y) = x^2 \Leftrightarrow$$

$$y = C\, e^{x^2}$$

La courbe passe par le point $(2; 2)$ *si*

$$C = 2\, e^{-4}$$

donc la solution est

$$\boldsymbol{y(x) = 2\, e^{x^2-4}}$$

Corrigé ex 20
La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = C_1\, e^{t} + C_2}$$

Corrigé ex 21
La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = C_1\, e^{-t} + C_2\, e^{t}}$$

Corrigé ex 22
La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = C_1\, e^{(-2-\sqrt{6})t} + C_2\, e^{(-2+\sqrt{6})t}}$$

La solution particulière demande de résoudre un système de deux équations à deux inconnues:

$$\begin{bmatrix} y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & = & 1 \\ C_1(-2-\sqrt{6}) + C_2(-2+\sqrt{6}) & = & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} C_1 & = & \frac{1}{6}(3-2\sqrt{6}) \\ C_2 & = & \frac{1}{6}(3+2\sqrt{6}) \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 23
La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = C_1\, e^{-4t} + C_2\, e^{-t}}$$

Corrigé ex 24
La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = C_1\, e^{-2t} + C_2\, t\, e^{-2t}}$$

La solution particulière demande de résoudre un système de deux équations à deux inconnues:

$$\left[\begin{array}{ccc} y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} C_1 & = & 1 \\ -2C_1 + C_2 & = & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & 5 \end{array}\right]$$

Corrigé ex 25

La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = e^{-t}(C_1 \ \cos(\sqrt{3}\, t) + C_2 \ \sin(\sqrt{3}\, t))}$$

La solution particulière demande de résoudre un système de deux équations à deux inconnues:

$$\left[\begin{array}{ccc} y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} C_1 & = & 1 \\ -C_1 + \sqrt{3}\, C_2 & = & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} C_1 & = & 1 \\ C_2 & = & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right]$$

Corrigé ex 26

La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = C_1 \ \cos(2t) + C_2 \ \sin(2t)}$$

Corrigé ex 27

La solution générale homogène (SGH) est

$$\boldsymbol{y(t) = C_1 \ \cos(2t) + C_2 \ \sin(2t)}$$

Une solution particulière inhomogène (SPI) s'obtient en postulant

$$y_0(t) = A\, t + B$$

avec A, B constantes.

On trouve

$$A = \frac{1}{4} \ , \ B = 0$$

Finalement, la solution générale inhomogène (SGI) est:

$$\boldsymbol{y(t) = C_1 \ \cos(2t) + C_2 \ \sin(2t) + \frac{1}{4}\, t}$$

Corrigé ex 28

La solution générale homogène (SGH) est

$$\boldsymbol{y(t) = e^{t}(C_1 \ \cos(t) + C_2 \ \sin(t))}$$

Une solution particulière inhomogène (SPI) s'obtient en postulant

$$y_0(t) = A\, t^2 + B\, t + C$$

avec A, B, C constantes.

On trouve

$$A = C = \frac{1}{2} \ , \ B = 1$$

La solution générale inhomogène (SGI) est:

$$\boldsymbol{y(t) = e^t(C_1\ \cos(t) + C_2\ \sin(t)) + \frac{1}{2}\, t^2 + t + \frac{1}{2}}$$

Pour trouver une solution particulière vérifiant les conditions initiales, il faut résoudre le système de deux équations à deux inconnues:

$$\left[\begin{array}{rcl} y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} C_1 + \frac{1}{2} & = & 0 \\ C_1 + C_2 + 1 & = & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} C_1 & = & -\frac{1}{2} \\ C_2 & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

et la solution (SPI) demandée est:

$$\boldsymbol{y(t) = -\frac{1}{2}\, (e^t\ (\cos(t) + \sin(t)) - 1 - 2t - t^2)}$$

Corrigé ex 29
La solution générale homogène (SGH) est

$$\boldsymbol{y(t) = C_1 + C_2\, t}$$

Une solution particulière inhomogène (SPI) s'obtient en postulant

$$y_0(t) = (A\, t^4 + B\, t^3 + C\, t^2 + D\, t + E)\, e^{3t}$$

avec A, B, C, D, E *constantes.*

On trouve

$$A = \frac{1}{9}\ ,\ B = -\frac{8}{27}\ ,\ C = \frac{4}{9}\ ,\ D = -\frac{32}{81}\ ,\ E = \frac{40}{243}$$

La solution générale inhomogène (SGI) est:

$$\boldsymbol{y(t) = C_1 + C_2\, t + \frac{1}{243}\, (27\, t^4 - 72\, t^3 + 108\, t^2 - 96\, t + 40)\, e^{3t}}$$

Pour trouver une solution particulière vérifiant les conditions initiales, il faut résoudre le système de deux équations à deux inconnues:

$$\left[\begin{array}{rcl} y(0) & = & 1 \\ \\ y'(0) & = & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} C_1 + \frac{40}{243} & = & 1 \\ \\ C_2 + \frac{8}{81}1 & = & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rcl} C_1 & = & \frac{203}{243} \\ \\ C_2 & = & \frac{73}{81} \end{array}\right]$$

et la solution (SPI) demandée est:

$$\boldsymbol{y(t) = \frac{1}{243}\, (e^{3t}\, (27t^4 - 72t^3 + 108t^2 - 96t + 40) + 219t + 203)}$$

Corrigé ex 30
La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = e^t(C_1 + C_2\, t) + t^2 + 4t + 6}$$

Corrigé ex 31
La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = C_1\, e^{-t} + C_2\, e^{3t} - \frac{1}{3}\, t^2 + \frac{4}{9}\, t - \frac{14}{27}}$$

Corrigé ex 32
Comme 3 est solution de l'équation caractéristique, , pour trouver une SPI, il faut postuler

$$y_0(t) = t\,(A\,t^2 + B\,t + C)\,e^{3t}$$

avec A, B, C constantes.

La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = C_1\,e^{-t} + C_2\,e^{3t} + t\,\left(\frac{1}{12}\,t^2 - \frac{1}{16}\,t + \frac{1}{32}\right)\,e^{3t}}$$

Corrigé ex 33
Comme $3 + i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, pour trouver une SPI, il faut postuler

$$y_0(t) = (A\,t^2 + B\,t + C)\,e^{3t}\,\cos(t) + (D\,t^2 + E\,t + F)\,e^{3t}\,\sin(t)$$

avec A, B, C, D, E, F constantes.

La solution générale est

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + e^{3t}\left(\frac{4}{17}\,t^2\,\sin(t) - \frac{1}{17}\,t^2\,\cos(t) + \frac{4}{289}\,t\,\sin(t) + \frac{152}{289}\,t\,\cos(t) - \frac{2480}{4913}\,\sin(t) - \frac{26}{4913}\,\cos(t)\right)$$

Il est toutefois plus rapide de passer par les nombres complexes et de postuler

$$z_0(t) = (A\,t^2 + B\,t + C)\,e^{(3+i)t}$$

où A, B, C sont des constantes complexes.
On obtient

$$A = -\frac{1}{17} - \frac{4i}{17} \qquad B = \frac{152}{289} - \frac{4i}{289} \qquad C = -\frac{26}{4913} + \frac{2480i}{4913}$$

Corrigé ex 34
Comme $1 + i$ est solution de l'équation caractéristique, pour trouver une SPI, il faut postuler

$$y_0(t) = t\,(A\,t^2 + B\,t + C)\,e^{t}\,\cos(t) + t\,(D\,t^2 + E\,t + F)\,e^{t}\,\sin(t)$$

avec A, B, C, D, E, F constantes.

La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = \frac{1}{24}\,e^{t}\,((6t^2 + C_1)\cos(t) + (4t^3 - 6t + C_2)\sin(t))}$$

$$\boldsymbol{y(t) = e^{t}\,(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)) + \frac{1}{6}\,e^{t}\,t^3\,\sin(t) + \frac{1}{4}\,e^{t}\,t^2\,\cos(t) - \frac{1}{4}\,e^{t}\,t\,\sin(t)}$$

Il est toutefois plus rapide de passer par les nombres complexes et de postuler

$$z_0(t) = t(A\,t^2 + B\,t + C)\,e^{(1+i)t}$$

On obtient

$$A = -\frac{i}{6} \qquad B = \frac{1}{4} \qquad C = \frac{i}{4}$$

Corrigé ex 35

Comme 1 est solution double de l'équation caractéristique, pour trouver une SPI, il faut postuler

$$y_0(t) = t^2 \cdot A\ e^t$$

avec A constante.

La solution générale est

$$\boldsymbol{y(t) = (c_1\ + c_2\ t)e^t + \frac{1}{2}\, t^2\, e^t}$$

Corrigé ex 36

Tableau des solutions:

EDO	*Racines r*	*Exposant k*	*Postulat*
$y'' - 3y' + 2y = 1$	$1\,,\,2$	0	$y = A$
$y'' - 3y' + 2y = t$	$1\,,\,2$	0	$y = A\,t + B$
$y'' - 3y' + 2y = e^t$	$1\,,\,2$	1	$y = A\,t\,e^t$
$y'' - 3y' + 2y = t\,e^t$	$1\,,\,2$	1	$y = t(A\,t\ + B)e^t$
$y'' - 3y' + 2y = \sin(t)$	$1\,,\,2$	i	$y = A\ \cos(t) + B\ \sin(t)$
$z'' - 3z' + 2z = e^{it}$			$z = C\,e^{it}$
$y'' - 3y' + 2y = e^t\sin(t)$	$1\,,\,2$	$1+i$	$y = e^t(A\ \cos(t) + B\ \sin(t))$
$z'' - 3z' + 2z = e^{(1+i)t}$			$z = C\,e^{(1+i)t}$
$y'' - 3y' + 2y = t\,e^t\sin(t)$	$1\,,\,2$	$1+i$	$y = e^t((A\,t\ + B)\cos(t) + (C\,t\ + D)\sin(t))$
$z'' - 3z' + 2z = t\,e^{(1+i)t}$			$z = (C_1t + C_0)\,e^{(1+i)t}$
$y'' - y' = 1$	$0\,,\,1$	0	$y = A\,t$
$y'' - y' = t$	$0\,,\,1$	0	$y = t(A\,t + B)$
$y'' - y' = e^t$	$0\,,\,1$	1	$y = A\,t\,e^t$
$y'' - y' = t\,e^t$	$0\,,\,1$	1	$y = t(A\,t\ + B)e^t$
$y'' - y' = \sin(t)$	$0\,,\,1$	i	$y = A\ \cos(t) + B\ \sin(t)$
			$z = C\,e^{it}$
$y'' - y' = e^t\sin(t)$	$0\,,\,1$	$1+i$	$y = e^t(A\ \cos(t) + B\ \sin(t))$
			$z = C\,e^{(1+i)t}$
$y'' - y' = t\,e^t\sin(t)$	$0\,,\,1$	$1+i$	$y = e^t((A\,t\ + B)\cos(t) + (C\,t\ + D)\sin(t))$
			$z = (C_1t + C_0)\,e^{(1+i)t}$

EDO	*Racines r*	*Exposant k*	*Postulat*
$y'' - 2y' + y = 1$	$1\,,\,1$	0	$y = A$
$y'' - 2y' + y = t$	$1\,,\,1$	0	$y = A\,t + B$
$y'' - 2y' + y = e^t$	$1\,,\,1$	1	$y = A\,t^2\,e^t$
$y'' - 2y' + y = t\,e^t$	$1\,,\,1$	1	$y = t^2(A\,t\, + B)e^t$
$y'' - 2y' + y = \sin(t)$	$1\,,\,1$	i	$y = A\,\cos(t) + B\,\sin(t)$
			$z = C\,e^{it}$
$y'' - 2y' + y = e^t\sin(t)$	$1\,,\,1$	$1+i$	$y = e^t(A\,\cos(t) + B\,\sin(t))$
			$z = C\,e^{(1+i)t}$
$y'' - 2y' + y = t\,e^t\sin(t)$	$1\,,\,1$	$1+i$	$y = e^t((A\,t\, + B)\cos(t) + (C\,t\, + D)\sin(t))$
			$z = (C_1 t + C_0)\,e^{(1+i)t}$
$y'' + y = 1$	$-i\,,\,+i$	0	$y = A$
$y'' + y = t$	$-i\,,\,+i$	0	$y = A\,t + B$
$y'' + y = e^t$	$-i\,,\,+i$	1	$y = A\,e^t$
$y'' + y = t\,e^t$	$-i\,,\,+i$	1	$y = (A\,t + B)\,e^t$
$y'' + y = \sin(t)$	$-i\,,\,+i$	i	$y = t(A\,\cos(t) + B\,\sin(t))$
			$z = C\,t\,e^{it}$
$y'' + y = e^t\sin(t)$	$-i\,,\,+i$	$1+i$	$y = e^t(A\,\cos(t) + B\,\sin(t))$
			$z = C\,e^{(1+i)t}$
$y'' - 2y' + y = t\,e^t\sin(t)$	$1\,,\,1$	$1+i$	$y = e^t((A\,t\, + B)\cos(t) + (C\,t\, + D)\sin(t))$
			$z = (C_1 t + C_0)\,e^{(1+i)t}$
$y'' - 2y' + 2y = t\,e^t\sin(t)$	$1 \pm i$	$1+i$	$y = t\,e^t((A\,t\, + B)\cos(t) + (C\,t\, + D)\sin(t))$
			$z = t\,(C_1 t + C_0)\,e^{(1+i)t}$

Corrigé ex 37

La solution générale s'obtient par le principe de superposition

$$\boldsymbol{y(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + \frac{1}{2}t\sin(t) - \frac{1}{3}\cos(2t)}$$

Corrigé ex 38

La solution est

$$\boldsymbol{y(t) = \frac{1}{6}\left(-3t^2 + 4e^t - 4e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t\right)\right)}$$

Corrigé ex 39
Réponse:

$$c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + c_3 - \frac{1}{4}\, t^2\, \sin(t) - \frac{3}{4}\, t\, \cos(t)$$

Corrigé ex 40
Réponse:

$$c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 - \frac{t^2}{2}$$

Corrigé ex 41
Réponse:

$$c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 + \frac{1}{2}\, t\, e^t - \frac{3}{4}\, e^t$$

Corrigé ex 42
Réponse:

$$c_4 t\, \sin(t) + c_3 \sin(t) + c_2 t\, \cos(t) + c_1 \cos(t) - \frac{1}{8}\, t^2\, \sin(t)$$

Corrigé ex 43
Réponse:

$$c_4 t + c_2 \sin(t) + c_1 \cos(t) + c_3 + \frac{t^4}{12} - t^2$$

Corrigé ex 44
Réponses:

1. $\omega \neq 1$

$$y(t) = c_2 \sin(t) + c_1 \cos(t) - \frac{\cos(t\omega)}{\omega^2 - 1}$$

2. $\omega = 1$

$$y(t) = c_2 \sin(t) + c_1 \cos(t) + \frac{1}{2} t \sin(t)$$

Corrigé ex 45

$$y(t) = c_1 + \frac{\sin(t\omega)}{\omega}$$

Corrigé ex 46

$$y(t) = c_1 e^{-t} - \frac{e^{-t\alpha}}{\alpha - 1}$$

Corrigé ex 47

$$y(t) = c_1 e^{-t} + \frac{e^{-\alpha t}}{(\alpha - 1)^2 + \omega^2} \left(\omega \sin(\omega t) + (1 - \alpha) \cos(\omega t)\right)$$

Corrigé ex 48

$$y(t) = \frac{2}{4}\, \sin\left(4t - \frac{3\pi}{4}\right) + e^{-t/2}\, \sin\left(\frac{\sqrt{47}}{2}\, t + \phi\right)$$

3 Révision

3.1 Enoncés

Exercice 49

a) *Donner toutes les racines complexes de l'équation:*

$$z^3 - z - 6 = 0$$

sachant que $z = 2$ *est une racine.*

b) *Donner la solution générale de l'équation différentielle:*

$$y'''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0.$$

Exercice 50

Calculer la solution du problème à condition initiale:

$$\begin{cases} u'(t) &= e^{-t}u(t)^3, \qquad t \geq 0 \\ u(0) &= \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Exercice 51

Résoudre l'équation différentielle avec conditions initiales:

$$\begin{cases} m\,y''(t) &= -6\,\pi\,\eta\,r\,y'(t) + mg, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0, \end{cases}$$

r, η, m, g *étant des constantes réelles strictement positives.*

Commentaire : la solution cherchée donne le mouvement d'une bille de masse m et de rayon r qui tombe dans un liquide de viscosité η. Initialement, la bille est lâchée à la surface du liquide avec une vitesse nulle.

Exercice 52

Résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante:

$$\begin{cases} y'(x) &= (1+x)(1+y(x)), \qquad x \geq 0 \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

3.2 Corrigés

Corrigé ex 49

a) *Le polynome est divisible par* $z - 2$. *On obtient*

$$z^3 - z - 6 = (z-2)(z^2 + 2z + 3)$$

Ce dernier polynôme s'annule si

$$z = -1 \pm \sqrt{2}$$

b) La solution générale de l'équation différentielle

$$y'''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0.$$

est

$$y(t) = c_3 e^{2x} + c_1 e^{-x} \sin\left(\sqrt{2}x\right) + c_2 e^{-x} \cos\left(\sqrt{2}x\right)$$

Corrigé ex 50

$$\frac{du}{dt} = e^{-t} u^3$$

Séparons les variables:

$$\int \frac{du}{u^3} = \int e^{-t} dt \Rightarrow -\frac{1}{2} u^{-2} = -e^{-t} + C_1 \Rightarrow u(t) = \frac{1}{\sqrt{C + 2e^{-t}}}$$

La condition initiale implique $C = 2$. Ainsi

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2 + 2e^{-t}}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + e^{-t})}}$$

Corrigé ex 51
La solution générale de

$$m\, y''(t) + 6\, \pi\, \eta\, r\, y'(t) = mg$$

est

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{6\pi r\eta}{m} t} + c_2 + \frac{gm}{6\pi r\eta} t$$

Les conditions initiales donnent

$$c_1 \to \frac{gm^2}{36\pi^2 r^2 \eta^2} \qquad c_2 \to -\frac{gm^2}{36\pi^2 r^2 \eta^2}$$

et la solution

$$y(t) = \frac{gm^2}{36\pi^2 r^2 \eta^2} e^{-\frac{6\pi r\eta}{m} t} - \frac{gm^2}{36\pi^2 r^2 \eta^2} + \frac{gm}{6\pi r\eta} t = \frac{gm^2}{36\pi^2 r^2 \eta^2} \left(e^{-\frac{6\pi r\eta}{m} t} - 1 + \frac{6\pi r\eta}{m} t \right)$$

Corrigé ex 52
On sépare les variables et on intègre.

$$\int_1^y \frac{1}{1 + y} dy = \int_0^x (1 + x) dx \Rightarrow \ln(1 + y) - \ln(2) = x + \frac{1}{2} x^2 \Rightarrow y(x) = -1 + 2e^{x + \frac{1}{2}x^2}$$