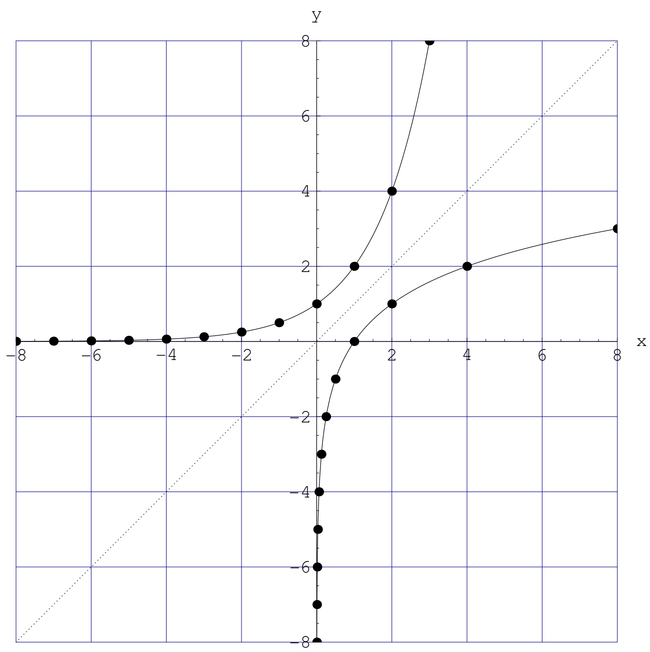
heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

Version 2012

Lang Fred



Graphes de $y = 2^x$ et de $y = \log_2(x)$

1 Les progressions

1.1 Généralités sur les suites

On appelle **suite** un ensemble de nombres

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

les **termes** a_n, placés dans un ordre défini (numérotés par un numéro n); chaque terme est déterminé par une règle de formation, à partir du premier (formule directe) ou à partir du précédent (**formule de récurrence**).

Exemple:

$$3, 7, 15, 31, 63, ...$$

La formule directe est

$$a_n = 2^{n+1} - 1$$

la formule de récurrence est

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

Exemple:

$$1, 2, 6, 24, 120, 720, ...$$

La formule directe est

$$a_n = n!$$

la formule de récurrence est

$$a_n = n\ a_{n-1}$$

La somme des termes d'une suite s'appelle une **série**.

Exemple:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$$

est la célèbre **série harmonique**.[1]

On rencontre aussi des suites doubles.
La plus connue est celle des **combinaisons**, formant le triangle de Pascal:

$n\|k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

[1] Sa somme est infinie, cette série est dite divergente. Elle diverge très lentement, il faut 10^{434} termes pour que la somme dépasse 1000. La différence $s_n - \ln(n)$ entre la somme des n premiers termes s_n et le logarithme $\ln(n)$ tend vers une constante appelée constante d'Euler, qui vaut environ 0.577215664.

La formule directe est

$$\boldsymbol{C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Une formule de récurrence est

$$\boldsymbol{C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}}$$

1.2 Progressions arithmétiques

Une **progression arithmétique** est une suite, où chaque terme, après le premier, s'obtient en ajoutant une quantité fixe, la **raison**, au terme précédent.
La formule de récurrence est donc

$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + r} \tag{1}$$

Exemple:

$$3, 7, 11, 15, 19, 23, 27...$$

La raison vaut 4.

La différence de deux termes consécutifs est une constante, la raison

Soit:

- $a = a_1$: le premier terme ;
- r : la raison ;
- a_n : le terme de rang n;
- n : le rang du terme;
- Les termes successifs sont:

  $a_1 = a, a_2 = a+r, a_3 = a+2r, a_4 = a+3r, ..., a_{n-1} = a+(n-2)r, a_n = a+(n-1)r, a_{n+1} = a+nr$

- La valeur du n^{ieme} terme est

  $$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)r} \tag{2}$$

- La somme des n premiers termes est donnée par:

  $$\boldsymbol{s_n = na + \frac{n(n-1)}{2}\, r = n\, \frac{a + a_n}{2}} \tag{3}$$

  Preuve:

  Ecrivons la somme $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ de deux manières:

s_n	=	a	+	$a+r$	+	$a+2r$	+	...	+	$a+(n-2)r$	+	$a+(n-1)r$
s_n	=	$a+(n-1)r$	+	$a+(n-2)r$	+	$a+(n-3)r$	+	...	+	$a+r$	+	a
$2s_n$	=	$2a+(n-1)r$	+	$2a+(n-1)r$	+	$2a+(n-1)r$	+	...	+	$2a+(n-1)r$	+	2a+(n-1)r

Chaque colonne donne $2a+(n-1)r$, il y a n colonnes, donc $2s_n = 2an + n(n-1)r$.

Exemple:

$$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27\ ; n=6, r=5 \Rightarrow s_6 = 6/2(2+27) = 87$$

Exemple:

$$5.3,\ 3.0,\ 0.7,\ -1.6,\ -3.9; n=5, r=-2.3 \Rightarrow s_5 = 5\ \frac{5.3+(-3.9)}{2} = 3.5$$

1.3 Progressions géométriques

Une **progression géométrique** est une suite où chaque terme, après le premier, s'obtient en multipliant le terme précédent par un nombre fixe appelé raison.
La formule de récurrence est donc

$$\boldsymbol{a_n = r\ a_{n-1}} \tag{4}$$

Exemple:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\ \ldots$$

la raison est 2

Le quotient de deux termes consécutifs est une constante r, la raison:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

- Les termes successifs de la progression s'écrivent:

$$a_1 = a\ ,\ a_2 = ar\ ,\ a_3 = ar^2\ ,\ a_4 = ar^3\ , \ldots ,\ a_n = ar^{n-1}$$

- Le n^{eme} terme est:

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}} \tag{5}$$

- La somme des n premiers termes est donnée par:

$$\boldsymbol{s_n = a\ \frac{1-r^n}{1-r}} \tag{6}$$

En effet:

$s_n = a\ \ + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \Rightarrow rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \Rightarrow$
$s_n - rs_n = a - ar^n \Rightarrow s_n(1-r) = a(1-r^n)$

Exemple:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = \frac{1-3^6}{1-3} = \frac{728}{2} = 364$$

Considérons une progression géométrique ayant un nombre **infini** de termes. Si la raison est supérieure à 1, la somme des termes tend vers l'infini. On dit que la série est **divergente**. Mais si la raison r est comprise entre -1 et 1, la série est **convergente** et la somme tend vers une limite finie donnée par:

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r}} \tag{7}$$

En effet, on a:

$$s_n = a\,\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a\,r^n}{1-r}$$

Le premier terme est constant, tandis que le second varie avec n ; $|r|$ étant inférieur à 1, r^n tend vers zéro, lorsque n tend vers l'infini et le second terme tend vers 0.

Exemple:

$$\frac{1}{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + ...$$

est un exemple de série géométrique convergente de raison $r = 1/10$.

Exemple:
Achille s'élance pour rattraper la tortue qui possède 1000 m d'avance et qui progresse 10 fois moins vite que lui. Zénon soutient qu'Achille ne rattrape jamais la tortue car:

- pendant qu'Achille parcourt 1000 m, la tortue fait 100 m ;
- pendant qu'Achille parcourt 100 m, la tortue fait 10 m ;
- pendant qu'Achille parcourt 10 m, la tortue fait 1 m ; etc.

Ainsi, Achille sera toujours en retard (Paradoxe de Zénon).
Que la somme d'une infinité de termes puisse donner une valeur finie était problématique pour les grecs, ça l'est d'ailleurs toujours pour une grande majorité de personnes.
Notons d_T le trajet en km parcouru par la tortue, d_A celui parcouru par Achille et v la vitesse en km/h de la tortue.
Alors $d_T = 1 + vt$ et $d_A = 10vt$.
Représentons le trajet parcouru en fonction du temps dans un système d'axes Otd.

Le point de rencontre $R(t_R; d_R)$ est donné par $d_T = d_A \Rightarrow t_R = \frac{1}{9v}$ et $d_R = \frac{10}{9}$.

t	d_A	d_T
0	0	1
$\frac{1}{10}$	1	$1 + \frac{1}{10}$
$\frac{1}{10} + \frac{1}{100}$	$1 + \frac{1}{10}$	$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$
$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$	$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$	$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$

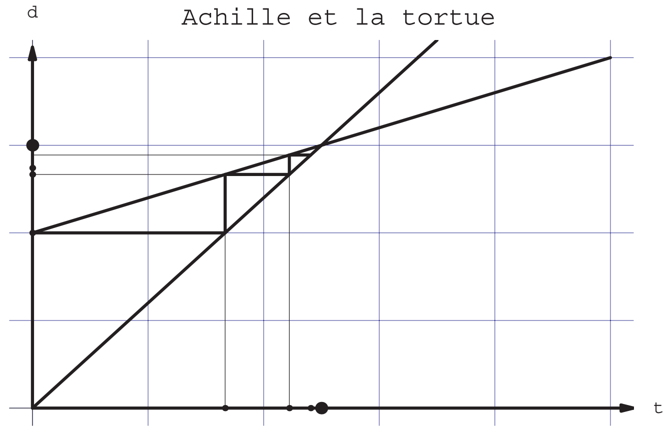


Figure 1:

Ainsi

$$d_R = d_A = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ... = d_T = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ... = \frac{10}{9}$$

et

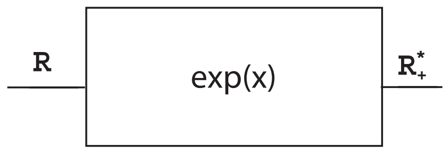
$$t_R = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ... = \frac{1}{9}$$

2 Exponentielles

La fonction

$$\boldsymbol{exp_a(x) = a^x}$$

est appelée **exponentielle de base** a, $\boldsymbol{a > 0}$, $\boldsymbol{a \neq 1}$.



2.1 Propriétés algèbriques

$exp_a(x+y) = exp_a(x) \cdot exp_a(y)$	$\boldsymbol{a^{x+y} = a^x a^y}$
$exp_a(0) = 1$	$\boldsymbol{a^0 = 1}$
$exp_a(1) = a$	$\boldsymbol{a^1 = a}$
$exp_a(-1) = \frac{1}{a}$	$\boldsymbol{a^{-1} = \frac{1}{a}}$

Les trois dernières propriétés donnent les trois points $(0;1)$, $(1;a)$ et $(-1;1/a)$ du graphe de l'exponentielle.

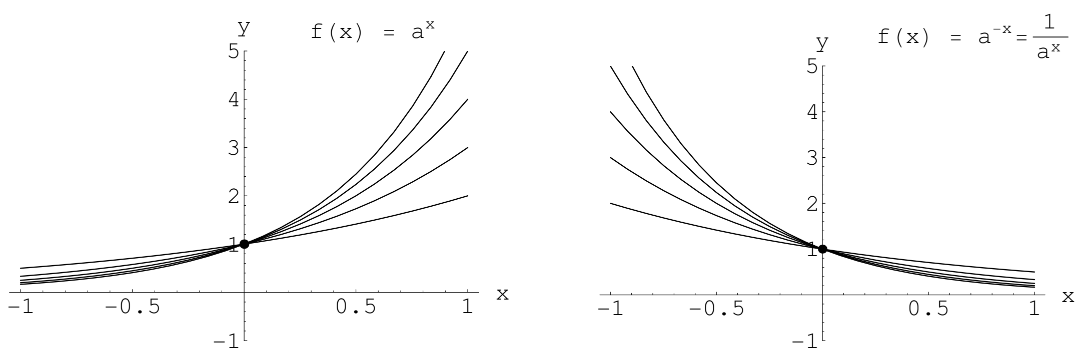


Figure 2: Exponentielles croissantes de bases $2, 3, 4, 5, 6$ et décroissantes de bases $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$.

2.2 Propriétés géométriques

Exponentielles croissantes: $a > 1$	**Exponentielles décroissantes: $a < 1$**
toujours définies	
strictement positives	
strictement croissantes	strictement décroissantes
point commun $(0;1)$	
$y \to +\infty$ si $x \to +\infty$	$y \to +\infty$ si $x \to -\infty$
asymptote horizontale $y = 0$	
à gauche	à droite

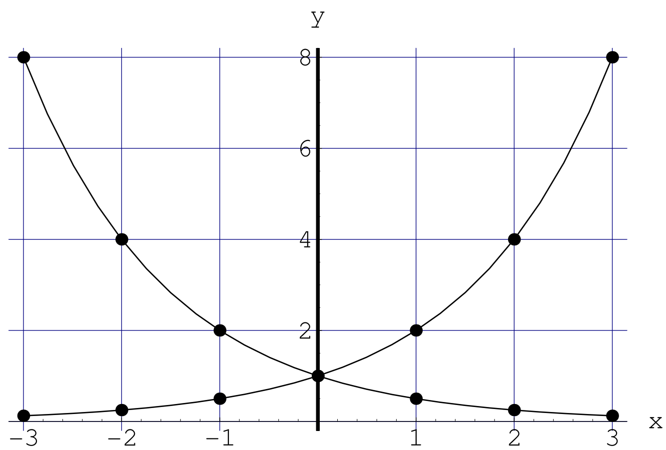


Figure 3: Exponentielles croissante $y = 2^x$ et décroissante $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

2.3 Exemple: Croissance bactérienne

Les fonctions exponentielles apparaissent dans les modèles de croissance de population.
Par exemple, on observe expérimentalement que le nombre de bactéries dans une culture double toutes les heures.
Si $N(0) = 1000$ bactéries sont présentes au départ, combien de bactéries $N(t)$ seront présentes au temps t ?
Combien y aura-t-il de bactéries après 3h30?

$t\,[h]$	0	1	2	3	4	...	t
$N(t)$	1000	2000	4000	8000	16000	...	?

On obtient la formule

$$N(t) = N(0) \cdot 2^t = 1000 \cdot 2^t$$

Alors $N(3,5) \approx 11314$.

2.4 Exemple: Radio-activité

Certaines quantités physiques décroissent exponentiellement.
Par exemple, le polonium ^{210}Po a une demi-vie de 140 jours, c'est-à-dire que au bout de 140 jours, la moitié de la masse de départ sera désintégrée.
Si $M_0 = 20g$ est la masse initiale de polonium, combien y en aura-t-il au temps t ?
Et après 2 ans?

$t\,[j]$	0	140	280	420	560	...	t
$M(t)\,[g]$	20	10	5	2,5	1,25	...	?

Soit $M(t)$ la masse de polonium au temps t. On obtient la formule

$$M(t) = M_0 \cdot 0{,}5^{t/140} = 20 \cdot 0{,}5^{t/140}$$

Alors $M(730) \approx 0{,}54$ g.

2.5 Exemple: Intérêts composés

Si nous plaçons un capital C_0 à la banque au temps $t = 0$ au taux τ, après une année nous aurons un intérêt de τC_0, donc un nouveau capital de

$$C(1) = C_0 + \tau C_0 = (1+\tau)C_0$$

Ce nouveau capital donnera, après une année, un intérêt de $\tau C(1)$ et donc un nouveau capital de

$$C(2) = (1+\tau)C(1) = (1+\tau)^2 C_0$$

En l'an t, le capital est donné par la formule de récurence:

$$C(t) = (1+\tau)C(t-1)$$

La formule directe donne alors:

$$\boldsymbol{C(t) = (1+\tau)^t\, C_0}$$

L'intérêt simple serait de ne pas faire "fructifier" l'intérêt, on obtient alors la formule[2]

$$C(t) = C_0 + t\tau C_0$$

Si l'intérêt est capitalisé chaque mois, alors un taux annuel de τ donne un taux mensuel de $\tau/12$ et la formule devient

$$C_{12}(t) = \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{12t} C_0$$

Plus généralement, si l'intérêt est capitalisé n fois par année, le taux est τ/n et le capital est donné par

[2] On le voit, l'intérêt simple conduit à la somme d'une progression arithmétique de raison τ alors que l'intérêt composé est celle d'une progression géométrique de même raison.

$$C_n(t) = \left(1 + \frac{\tau}{n}\right)^{nt} C_0$$

Que devient le capital si l'intérêt est capitalisé à tout instant, c'est-à-dire continûment? C'est la valeur limite de $C_n(t)$ lorsque n devient infiniment grand.

$$C(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\tau}{n}\right)^{nt} C_0$$

Pour calculer celle-ci, posons $k = n/\tau$ et séparons les parties dépendantes de n, de celles qui ne le sont pas:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\tau}{n}\right)^{nt} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k\tau t} = \lim_{k\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{\tau t} = \left(\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{\tau t}$$

On peut démontrer que la limite suivante existe

$$\boldsymbol{e = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} \approx 2,718282}$$

C'est un nombre transcendant appelé e par le mathématicien suisse Leonhard Euler.

La formule du capital devient alors:

$$\boldsymbol{C(t) = C_0 \cdot e^{\tau t}}$$

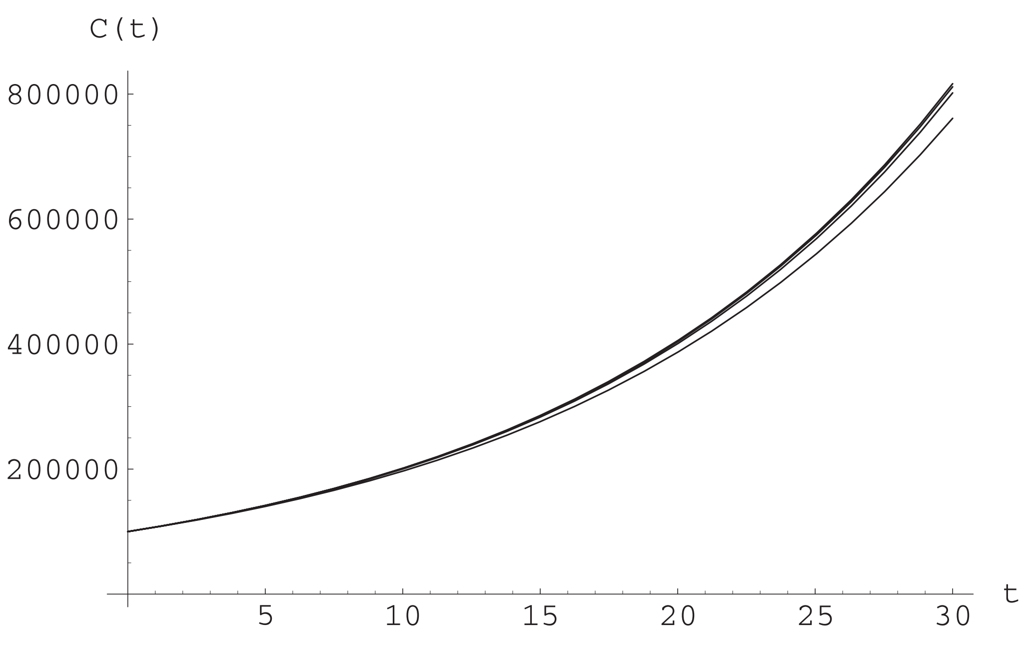


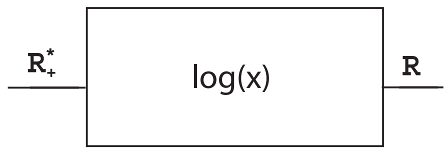
Figure 4: $C_n(t)$ pour $n = 1, 4, 12, \infty$, avec $C_0 = 100000$ et $\tau = 7\%$

3 Logarithmes

La fonction inverse (ou réciproque) de l'exponentielle de base a est appelée **logarithme de base** a.
Elle se note

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$$

Elle n'est définie que pour des arguments strictement positifs.



Remarque:

Les arguments et les valeurs des exponentielles et des logarithmes n'ont pas d'unités!

3.1 Propriétés algèbriques

$\log_a(xy)$	$=$	$\log_a(x) + \log_a(y)$
$\log_a(x/y)$	$=$	$\log_a(x) - \log_a(y)$
$\log_a(x^n)$	$=$	$n \log_a(x)$
$\log_a(1)$	$=$	0
$\log_a(a)$	$=$	1
$\log_a(1/a)$	$=$	-1

Les trois dernières propriétés donnent les trois points $(1; 0)$, $(a; 1)$ et $(1/a; -1)$ du graphe du logarithme.

3.2 Quelques confusions trop fréquentes

Trop souvent, l'étudiant confond l'entrée et la sortie, en affirmant, par exemple qu'un logarithme est toujours positif ou qu'il ne peut s'annuler.

Il arrive aussi que des règles de calcul soient créées pour l'occasion.

Exemples:

$\log_a(x+y)$	$\neq$	$\log_a(x)+\log_a(y)$
$\log_a(x+y)$	$\neq$	$\log_a(x)\cdot\log_a(y)$
$\log_a(x)\cdot\log_a(y)$	$\neq$	$\log_a(x\cdot y)$
$\log_a(x)\cdot\log_a(y)$	$\neq$	$\log_a(x)+\log_a(y)$
$(\log_a(x))^2$	$\neq$	$\log_a(x^2)$

Les mêmes erreurs se produisent avec la fonction exponentielle.

Moyen mnémotechnique:

"Le logarithme est votre ami: il transforme les produits en sommes"

3.3 Propriétés géométriques

Comme toute fonction inverse, le graphe de $f(x)=\log_a(x)$ s'obtient à partir de celui de $exp_a(x)$ par une symétrie d'axe $y=x$:

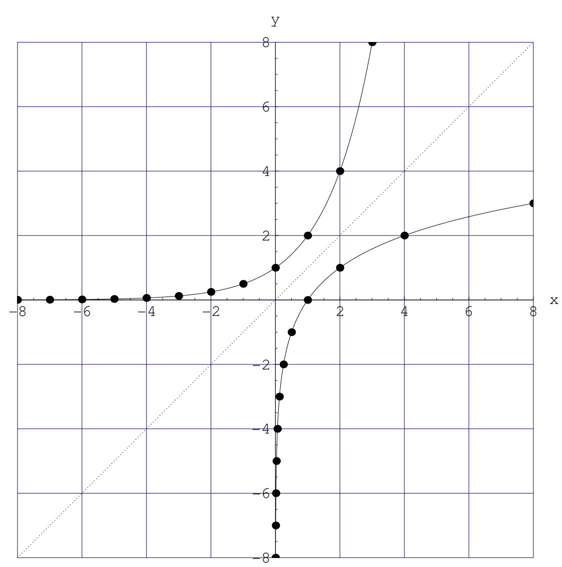


Figure 5: Graphes de $y=2^x$ et de $y=\log_2(x)$

Habituellement, on ne considère que des logarithmes croissants, de bases supérieures à un.

Les logarithmes:

sont définis pour des arguments strictement positifs
sont négatifs pour des arguments inférieurs à 1
sont nuls lorsque l'argument vaut 1
sont positifs pour des arguments supérieurs à 1
sont strictement croissants
passent tous par le même point $(1; 0)$
$y \to +\infty$ si $x \to +\infty$ $y \to -\infty$ si $x \to 0$
ont une asymptote verticale à gauche $x = 0$

Souvent il est utile de considérer la fonction

$$f(x) = \log |x|$$

qui est définie pour $x \neq 0$.
C'est une fonction paire, elle admet l'axe de symétrie Oy.

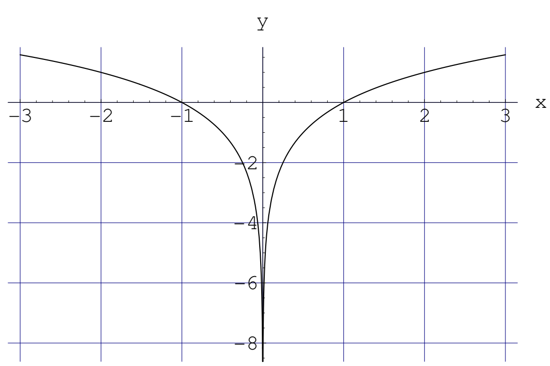


Figure 6: Graphe de $y = \log |x|$

3.4 Logarithmes naturels et décimaux

Les logarithmes les plus fréquents sont ceux de base 2, 10 et e.
Les logarithmes de base $\boldsymbol{e}$ sont dits **naturels** ou **Népériens**.
Ils se notent

$$\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$$

Ceux de base **10** sont dits **décimaux**:

$$\mathbf{log}(\boldsymbol{x})$$

Rappelons que

$$\ln(e) = 1$$

et

$$\log(10) = 1$$

3.5 Formules de changement de base

- pour les logarithmes

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

  et

$$\log(e) = \frac{1}{\ln(10)}$$

- pour les exponentielles

$$2^{ax} = e^{bx} = 10^{cx} \Rightarrow$$

$$b = a\ \ln(2) \text{ et } c = b\ \log(e)$$

  ou plus généralement

$$a^x = b^y \Leftrightarrow y = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}\ x$$

4 Fonctions hyperboliques

4.1 La fonction cosinus hyperbolique

Un câble suspendu à deux poteaux et soumis uniquement à la pesanteur dûe à son propre poids admet pour graphe une courbe appelée "chaînette".
En plaçant judicieusement un système d'axes Oxy, l'équation de la chaînette est

$$y = \frac{a}{2}\,(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a\cosh(\frac{x}{a})$$

où a est une constante positive.

On définit le **cosinus hyperbolique** par

$$\boldsymbol{\cosh(x) = \frac{1}{2}\,(e^{x} + e^{-x})}$$

- Cette fonction est toujours définie.
- Elle prend des valeurs entre 1 et ∞.
- C'est une fonction **paire** car $\cosh(-x) \equiv \cosh(x)$.
- Elle admet deux asymptotes exponentielles $y = \frac{1}{2}\,e^{x}$ et $y = \frac{1}{2}\,e^{-x}$.
- Le graphe est donné à la figure (7).

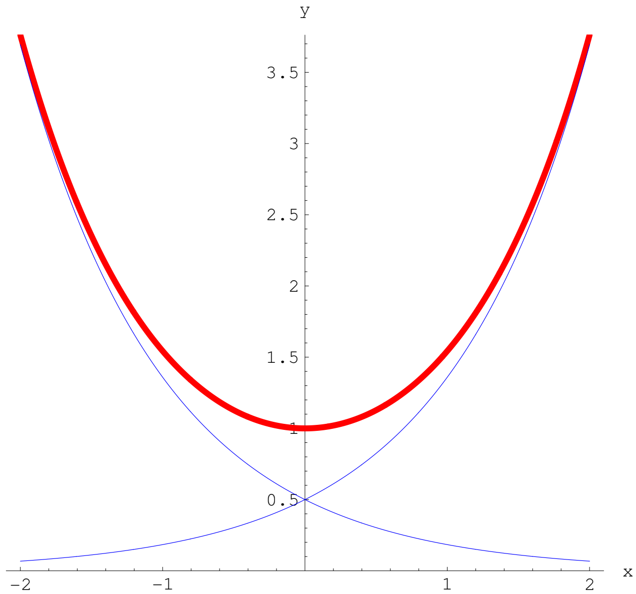


Figure 7: Le cosinus hyperbolique $y = \cosh(x)$ et les deux exponentielles $y = \frac{1}{2}\, e^{x}$ et $y = \frac{1}{2}\, e^{-x}$.

4.2 La fonction sinus hyperbolique

On définit le **sinus hyperbolique** par

$$\boldsymbol{\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)}$$

- Cette fonction est toujours définie.
- Elle prend des valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.
- Elle s'annule en 0.
- C'est une fonction **impaire** car $\sinh(-x) \equiv -\sinh(x)$.
- Elle admet deux asymptotes exponentielles $y = \frac{1}{2}\, e^{x}$ et $y = -\frac{1}{2}\, e^{-x}$.
- Le graphe est donné à la figure (8).

4.3 La fonction tangente hyperbolique

La **tangente hyperbolique** est définie par

$$\boldsymbol{\tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}}$$

- Cette fonction est toujours définie.
- Elle prend des valeurs entre -1 et $+1$.
- Elle s'annule en 0.
- C'est une fonction **impaire** car $\tanh(-x) \equiv -\tanh(x)$.
- Elle admet les asymptotes horizontales $y = \pm 1$.
- Le graphe est donné à la figure (9).

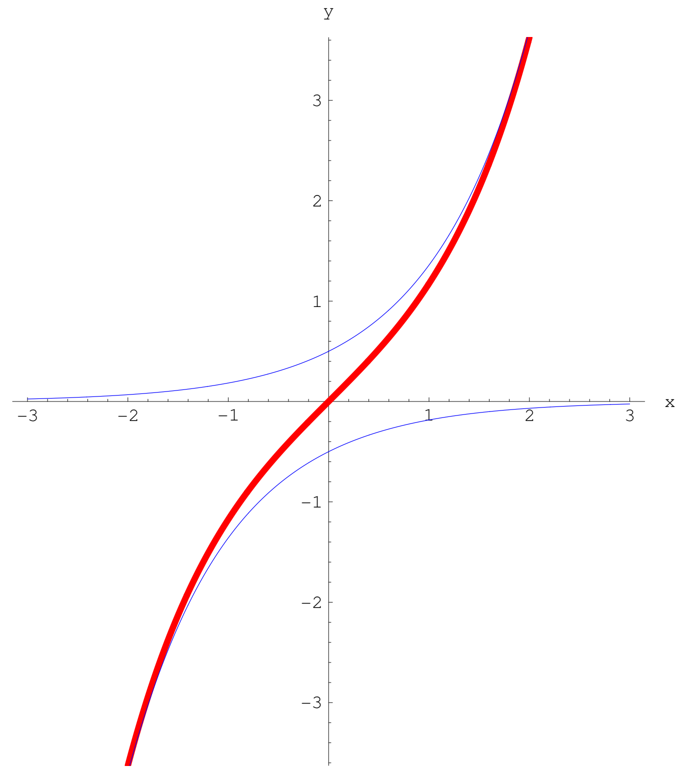


Figure 8: Le sinus hyperbolique $y = \sinh(x)$ et les deux exponentielles $y = \frac{1}{2}\, e^{x}$ et $y = -\frac{1}{2}\, e^{-x}$.

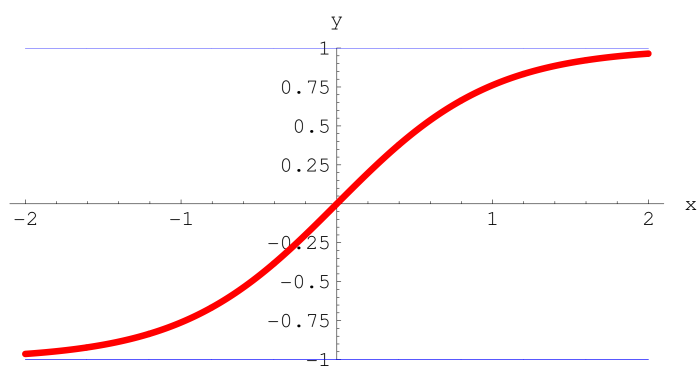


Figure 9: La tangente hyperbolique $y = \tanh(x)$ et les deux horizontales $y = -1$ et $y = 1$.

4.4 La fonction cosinus hyperbolique inverse

En résolvant l'équation

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

par rapport à x, il est facile de voir que la fonction **cosinus hyperbolique inverse**[3] est donnée par

$$\mathbf{arccosh(x) = ln}\left(\boldsymbol{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right)$$

[3]Les fonctions hyperboliques inverses sont traditionnellement notées $argcosh(x), argsinh(x), argtanh(x)$.

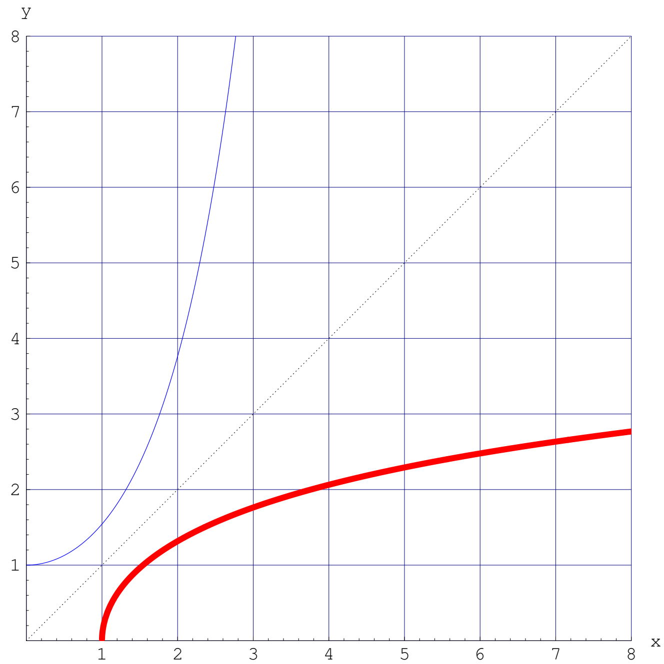


Figure 10: Le cosinus hyperbolique inverse $y = \text{arccosh(x)}$ et le cosinus hyperbolique $y = \cosh(x)$.

- Cette fonction est définie si $x \geq 1$.
- Elle prend des valeurs entre 0 et ∞.
- Elle s'annule en 1.
- Le graphe est donné à la figure (10).

4.5 La fonction sinus hyperbolique inverse

En résolvant l'équation

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

par rapport à x, il est facile de voir que la fonction **sinus hyperbolique inverse** est donnée par

$$\mathbf{arcsinh(x) = ln}\left(\boldsymbol{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

- Cette fonction est toujours définie.
- Elle prend des valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.
- Elle s'annule en 0.
- C'est une fonction **impaire**.
- Le graphe est donné à la figure (11).

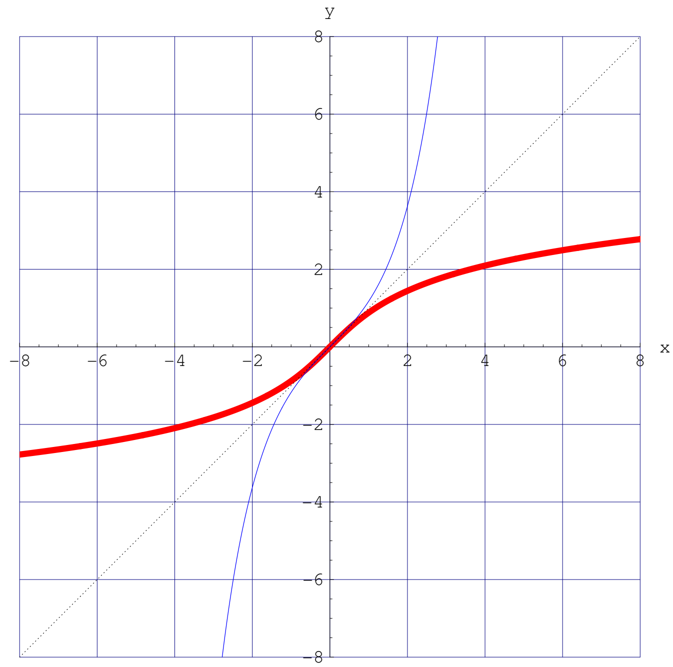


Figure 11: Le sinus hyperbolique inverse $y = \text{arcsinh(x)}$ et le sinus hyperbolique $y = \sinh(x)$.

4.6 La fonction tangente hyperbolique inverse

On établit de même que la fonction **tangente hyperbolique inverse** est donnée par

$$\mathbf{arctanh(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}\right)$$

- Cette fonction est définie si $-1 < x < 1$.
- Elle prend des valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.
- Elle s'annule en 0.
- C'est une fonction **impaire**.
- Elle admet les asymptotes verticales $x = \pm 1$.
- Le graphe est donné à la figure (12).

4.7 La fonction cotangente hyperbolique inverse

La fonction **cotangente hyperbolique inverse** est donnée par

$$\mathbf{arccoth(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}\right)$$

- Cette fonction est définie si $|x| > 1$.
- C'est une fonction **impaire**.
- Elle admet l'asymptote horizontale $y = 0$ et les asymptotes verticales $x = \pm 1$.
- Le graphe est donné à la figure (13).

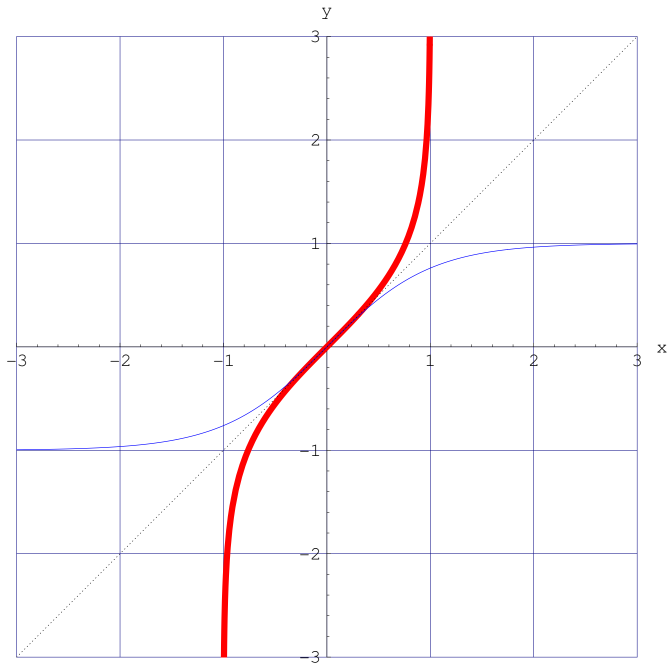


Figure 12: La tangente hyperbolique inverse $y = \text{arctanh}(\text{x})$ et la tangente hyperbolique $y = \tanh(x)$.

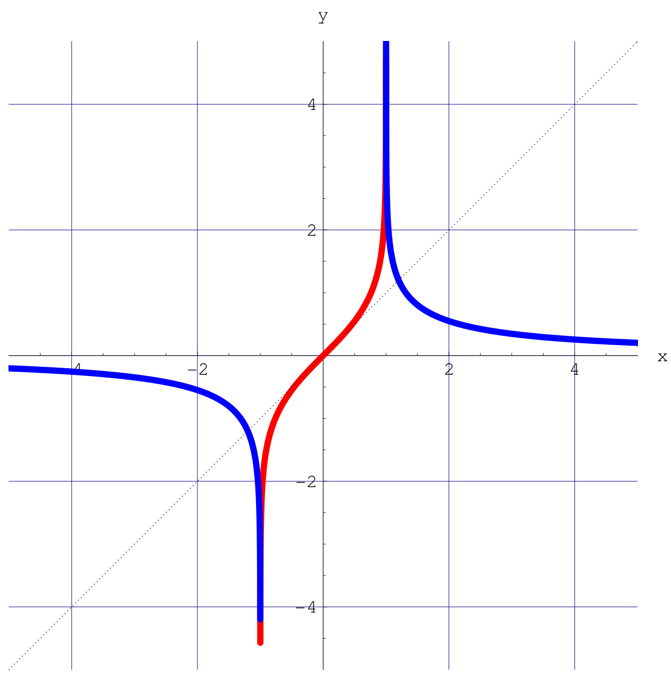


Figure 13: La cotangente hyperbolique inverse et la tangente hyperbolique inverse.

5 Equations logarithmiques et exponentielles

Les principes de base sont:
Isoler l'inconnue, utiliser les propriétés des log-exp pour réduire l'expression, faire un changement de variable pour se ramener à une équation polynômiale.

La quasi-totalité des équations contenant des termes mixtes:
polynômial-logarithmique, polynômial-exponentiel, logarithmique-exponentiel, polynômial-trigonométrique, etc... n'ont pas de solutions formelles!

Exemple 1
Résoudre

$$\mathbf{\log(2x+3) = \log(11) + \log(3)}$$

Les propriétés des logarithmes donnent :

$$\log(2x+3) = \log(33)$$

En appliquant l'exponentielle exp_{10} à chaque membre:

$$2x+3 = 33 \Rightarrow x = 15$$

Exemple 2
Résoudre

$$\mathbf{\log(2x+3) + \log(x) = 3}$$

Les propriétés des logarithmes donnent :

$$\log(2x^2+3x) = 3$$

En appliquant l'exponentielle exp_{10} à chaque membre:

$$2x^2+3x = 1000 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{8009}}{4}$$

Seul $-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{8009}}{4}$ *est admissible.*

Exemple 3
Résoudre

$$\boldsymbol{-2x^2e^{-2x} + 2xe^{-2x} = 0}$$

On factorise:

$$2x(1-x)e^{-2x} = 0$$

D'où x = 0 et x = 1, l'exponentielle ne s'annulant jamais.

Exemple 4
Résoudre

$$\boldsymbol{N = A\,e^{mt}}$$

par rapport à t.

$$\frac{N}{A} = e^{mt} \Rightarrow \ln\left(\frac{N}{A}\right) = mt \Rightarrow t = \frac{1}{m}\,\ln\left(\frac{N}{A}\right) = \ln\left(\sqrt[m]{\frac{N}{A}}\right)$$

Exemple 5
Résoudre

$$\boldsymbol{R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

par rapport à I.
On applique l'exponentielle de base 10 *à chaque membre:*

$$10^R = \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0 \; 10^R$$

Exemple 6
Résoudre

$$\boldsymbol{5^{2x+1} = 6^{x-2}}$$

par rapport à x.
On applique la fonction ln *à chaque membre:*

$$(2x+1)\ln(5) = (x-2)\ln(6)$$

d'où

$$x = \frac{\ln(5) + 2\;\ln(6)}{\ln(6) - 2\;\ln(5)} = \frac{\ln(5) + \ln(36)}{\ln(6) - \ln(25)} = \frac{\ln(180)}{\ln(6/25)}$$

Exemple 7
Résoudre

$$\boldsymbol{5^x = 6 + 5^{-x}}$$

par rapport à x.
On pose

$$z = 5^x \Rightarrow \frac{1}{z} = 5^{-x}$$

L'équation devient

$$z = 6 + \frac{1}{z} \Rightarrow z = 3 \pm \sqrt{10} \Rightarrow 5^x = 3 \pm \sqrt{10}$$

Mais $3 - \sqrt{10}$ est négatif et 5^x est strictement positif, donc seule

$$5^x = 3 + \sqrt{10}$$

donne une solution.
On obtient $x \log 5 = \log\left(3 + \sqrt{10}\right)$ et

$$x = \frac{\log\left(3 + \sqrt{10}\right)}{\log 5}$$

6 Exercices

Exercice 1
Si le 6ème terme d'une progression arithmétique est 8 *et le 11e terme* -2, *quels sont le premier terme et la raison?*

Exercice 2
Trouver le 12ème terme de la progression arithmétique: $2, 5, 8, ...$

Exercice 3
Si le premier terme d'une progression arithmétique est 7, *et la différence commune est* -2, *trouver le quinzième terme et la somme des* 15 *premiers termes.*

Exercice 4
Trouver la somme des 20 *premiers termes de la progression arithmétique* $-9, -3, 3, ...$

Exercice 5
Trouver la somme des 100 *premiers entiers positifs.*

Exercice 6
Combien de termes de la séquence $-9, -6, -3, ...$ *faut-il prendre pour que la somme soit égale à* 66*?*

Exercice 7
Déterminer les 4 premiers termes ainsi que le 12ème terme de la progression arithmétique donnée par $a_n = 2n + 3$.

Exercice 8
La somme de 3 *nombres d'une progression arithmétique vaut* 27, *et la somme de leurs carrés vaut* 293. *Déterminer ces* 3 *termes.*

Exercice 9
Si le premier terme d'une progression géométrique vaut 9 *et le rapport commun* $-2/3$, *déterminer les* 5 *premiers termes.*

Exercice 10
Ecrire les 4ème, 5ème et le 6ème terme d'une suite dont le terme général est:
a)

$$\frac{2n+1}{n!}$$

b)

$$(-1)^{2n} \frac{x^{n-1}}{(2n)!}$$

Exercice 11
Le premier terme d'une progression géométrique vaut 27, *le nème terme vaut* $32/9$ *et la somme des* n *termes vaut* $665/9$. *Trouver* n *et* r.

Exercice 12
Trouver la somme des 10 premiers termes de la progression géométrique: $15, 30, 60, 120, ...$

Exercice 13
Trouver la somme de la série géométrique infinie suivante:

$$30 + 10 + \frac{10}{3} + ... + 30\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + ...$$

Exercice 14
a) Un capital C_0 est placé à la banque en l'an 0 avec un taux d'intérêt annuel de $\tau\%$.
Démontrer qu'après t années le capital s'élève à $C(t) = C_0(1+\tau)^t$.
b) Quel est le capital si l'intérêt est versé mensuellement?

Exercice 15
Un compte épargne retraite est conclu en l'an 1 pour n années.
Chaque année, un versement de C_0 francs est versé sur le compte.
Le premier versement est effectué au début de l'an 1.
Le taux est $\tau\%$.
Calculé le capital au bout des n années.

Exercice 16
Simplifier l'expression

$$\frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Exercice 17
Un médicament est éliminé du corps dans l'urine selon la loi suivante (t heures, m en mg)

$$m(t) = 10 \cdot 0{,}8^t$$

Calculer la masse initiale m_0 du médicament.
Calculer la masse après 8 heures.
Calculer le pourcentage de médicament éliminé chaque heure.

Exercice 18
Certaines institutions calculent le paiement mensuel M d'un emprunt L au taux d'intérêt r calculé sur t années par la formule:

$$M = \frac{Lrk}{12(k-1)} \text{ où } k = \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$$

Calculer le paiement mensuel d'un emprunt de $90'000$ sur 30 ans au taux de 12%.
Calculer l'intérêt total versé pour payer cet emprunt.

Exercice 19
D'après une loi de Newton, le taux de refroidissement d'un corps est proportionnel à la différence entre la température du corps et la température ambiante. La loi donnant la température en fonction du temps est alors du type

$$T(t) = T_{amb} + k \cdot 2^{ct}$$

où k et c sont des constantes. Dans une pièce de température constante $75°$, la surface d'un morceau de fer passe de la température $125°$ à la température $100°$ en 30 minutes. Donner les valeurs de k et c.
Supposons que $t = 0$ corresponde à $13:00$, donner la température à $14:00, 15:30$ et $16:00$.
Esquisser le graphe de $T(t)$ pour $0 \leq t \leq 4$.

Exercice 20
La masse en fonction du temps est donnée par la formule suivante:

$$m(t) = m_0 \, e^{-t/t_0}$$

On pose $y = m(t)/m_0$ et $x = t/t_0$.
y est la masse relative et x le temps relatif. Ce sont des grandeurs adimensionels.
Dessiner $y = y(x)$.
Dessiner $m = m(t)$ dans un système d'axes où t_0 est l'unité de temps et m_0 celle de masse.

Exercice 21

- *Soit une fonction exponentielle croissante ($C, k > 0$)*

$$y(x) = C \cdot a^{kx}$$

  La **période de doublement** *est la valeur T telle que*

$$y(x+T) = 2 \cdot y(x)$$

  Cette valeur est une constante (indépendante de x).

  Calculer T en fonction de C, a, k.

- *Soit une fonction exponentielle décroissante ($C, k > 0$)*

$$y(x) = C \cdot a^{-kx}$$

  La **période de demi-décroissance** *est la valeur T telle que*

$$y(x+T) = \frac{1}{2} \cdot y(x)$$

  Cette valeur est une constante (indépendante de x).

  Calculer T en fonction de C, a, k.

Exercice 22
Prouver les identités hyperboliques

1.
$$\mathrm{ch}^2(a) - \mathrm{sh}^2(a) = 1$$

2.
$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(a)$$

3.
$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(b)\mathrm{sh}(a)$$

4.
$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$$

5.
$$\mathrm{sh}(a) + \mathrm{sh}(b) = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

6.
$$\mathrm{ch}(a) - \mathrm{ch}(b) = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Exercice 23
Utiliser les logarithmes décimaux pour créer une fonction $NC(n)$ donnant le nombre de chiffres de l'entier positif n.

Exercice 24
Pour un médicament A, la relation entre l'effet E et la dose d est du type

$$E(d) = a \cdot \ln(d) + b$$

On obtient $E(1) = 0,20$ *et* $E(10) = 0,80$.

- *Déterminer les paramètres* a *et* b *pour le médicament* A.
- *Un médicament* B, *suivant le même mécanisme d'action est deux fois plus actif que le médicament* A *pour ces doses là. Trouver les doses pour le médicament* B, *nécessaires à l'obtention de l'effet* $0,20$ *et* $0,80$.
- *Trouver la relation dose-effet* $E = E(d)$ *pour le médicament* B.

source: http://www.u-psud.fr/Chatenay/formation.nsf

Exercice 25
On considère la fonction

$$f(x) = 1 - (1 - 2^{-kx})^n, \; k, n > 0, n \text{ entier positif}$$

Sur le même dessin, esquisser les graphes de $y = 2^{-kx}$ *et* $y = 1 - 2^{-kx}$, *distinguer ensuite si* n *est pair ou impair et dessiner* $y = (1 - 2^{-kx})^n$, *puis* $y = 1 - (1 - 2^{-kx})^n$.
Déterminer le comportement asymptotique et calculer les coordonnées des points sur les axes.

Exercice 26
On considère la fonction

$$f(x) = e^{-(x-\mu)^2/2}$$

Prouver que la courbe admet l'axe de symétrie $x = \mu$ *en vérifiant que, quel que soit* x,

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

Esquisser le graphe de $f(x)$.
Calculer en particulier le comportement asymptotique et les points sur les axes. Donner les coordonnées du point maximum de la courbe.

Exercice 27
Exprimer E *en termes de* $\log(x), \log(y), \log(z)$ *et* $\log(w)$.
1)

$$E = \log\left(\frac{x^3 w}{y^2 z^4}\right)$$

2)

$$E = \log\left(\frac{\sqrt[3]{z}}{x\sqrt{y}}\right)$$

Exercice 28
Exprimer

$$2\,\log(x) + \frac{1}{3}\,\log(x-2) - 5\,\log(2x+3)$$

à l'aide d'un seul logarithme.

Exercice 29
Remplacer le signe $\bigtriangledown$ *par* $=$ *ou* $\neq$.

1. $\log(x) + \log(y) \bigtriangledown \log(x+y)$
2. $\log\left(\frac{x}{y}\right) \bigtriangledown \log(x) - \log(y)$
3. $\log\left(\frac{x}{y}\right) \bigtriangledown \frac{\log(x)}{\log(y)}$
4. $\log(\sqrt{x}) \bigtriangledown \frac{1}{2}\log(x)$
5. $\log(xy) \bigtriangledown \log(x) + \log(y)$
6. $\log(xy) \bigtriangledown \log(x)\log(y)$
7. $\log(x^2) \bigtriangledown (\log(x))^2$

Exercice 30
Résoudre

$$A = B \cdot 2^{Ct} + D$$

par rapport à t.

Exercice 31
Résoudre et simplifier l'équation par rapport à D:

$$log(D) = log(c) - k\, log(p)$$

Exercice 32
Résoudre par rapport à t la formule

$$M = \frac{Lrk}{12(k-1)} \text{ où } k = \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$$

Exercice 33
Prouver que les fonctions arctanh(x) *et* arccoth(x) *sont impaires.*

Exercice 34
Etablir les formules suivantes:

- $$\mathrm{arccosh(x/a)} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \ln(a)$$

  pour $|x| \geq a$.

- $$\mathrm{arcsinh(x/a)} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \ln(a)$$

Indication:

$$y = \mathrm{arccosh(x/a)} \Rightarrow \cosh(y) = x/a$$

Remplacer le cosinus hyperbolique par sa définition et résoudre par rapport à y.

Exercice 35
Donner l'ensemble de définition et esquisser le graphe des fonctions suivantes:

1. $\ln(x)$
2. $\ln(-x)$
3. $\ln(|x|)$
4. $-\ln(x)$
5. $-\ln(-x)$
6. $-\ln(|x|)$
7. $|\ln(x)|$
8. $-|\ln(x)|$
9. $\frac{1}{\ln(x)}$
10. $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$
11. $\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$
12. $(\ln(x))^2$

Exercice 36
Le courant électrique dans un circuit contenant une résistance R et une self L est donné en fonction du temps par

$$I(t) = I_0\, e^{-Rt/L}$$

- *Résoudre cette égalité par rapport à t.*
- *Remarquer que I_0/I est adimensionnel et que L/R a la dimension d'un temps.*
- *Esquisser le graphe de $I = I(t)$ dans un système d'axes OtI, en prenant L/R pour unité sur l'axe Ot et I_0 pour unité sur l'axe OI.*

Exercice 37
Résoudre l'équation

$$x^{\sqrt{\log(x)}} = 10^8$$

Exercice 38
Un courant électrique dans un circuit est donné en fonction du temps par

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

- *Résoudre cette égalité par rapport à t.*
- *Remarquer que $I_1 = V/R$ a la dimension d'un courant et que $t_1 = L/R$ celle d'un temps.*
- *Poser $y = I/I_1$ et $x = t/t_1$. Ecrire y en fonction de x. Esquisser le graphe de $y = y(x)$ dans un système d'axes Oxy.*

Exercice 39
Le taux de refroidissement d'un corps est donné en fonction du temps par une loi du type

$$T(t) = T_0 + ke^{ct}$$

où k et c sont des constantes. Sachant qu'au temps t_1, la température vaut T_1, et qu'au temps t_2, elle vaut T_2, prouver, en éliminant k et c que T est alors donnée par la formule suivante:

$$T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)\left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}\right)^{\left(-\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)}$$

Exercice 40
Résoudre les équations suivantes:

1. $\log(x^2 - 10x + 121) = 2$
2. $\log(x - 2) = \log(x) + \log(x^2 - 14)$
3. $\log(x) + \log(x + 5) = 2\log(x - 2)$
4. $\log(3 - x) - \log(2) = 1 + \log(x)$
5. $2\,\log(x - 1) - \log(2x^2 + 3x - 5) = 0$
6. $\log(1 - x) + \log(1 - 2x) = \log(15(x + 3))$
7. $\dfrac{1}{2}\log(12x + 16) = \log(x + 3)$
8. $\log_2(x^2 - 3x) = 2$
9. $\log_3(\sqrt{x - 1} - 2) = 0$
10. $\log_2(x^2 + 1) - \log_2(x) = 1$
11. $\ln(y) = -\ln(x) + C \Rightarrow y =?$
12. $\ln(y) = \ln(x) + \ln(C) \Rightarrow y =?$
13. $\left\{\begin{array}{ccc} \log(x) + \log(y) & = & \log(12) \\ x^2 + y^2 & = & 25 \end{array}\right\}$

14. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 4 \\ 2^{xy} & = & 8 \end{array} \right\}$

15. $\left\{ \begin{array}{ccc} x+\log(y) & = & 3 \\ y & = & 10^{x} \end{array} \right\}$

16. $\left\{ \begin{array}{ccc} x^{y} & = & 100 \\ 2\ \log(x)+y & = & 4 \end{array} \right\}$

17. $\left\{ \begin{array}{ccc} x^{\log(y)} & = & 10^{6} \\ \log(x)+3\ \log(y) & = & 9 \end{array} \right\}$

7 Corrigé

Corrigé ex 1
La raison est -2 *et le premier terme est* 18.

Corrigé ex 2
35

Corrigé ex 3
-21 *et* $S_{15} = -105$

Corrigé ex 4
$S_{20} = 960$

Corrigé ex 5
$S_{100} = 5050$

Corrigé ex 6
11 *termes*

Corrigé ex 7
$5/7/9/11$ *et* $L = 27$

Corrigé ex 8
$4/9/14$

Corrigé ex 9
$9/-6/4/-\frac{8}{3}/\frac{16}{9}$

Corrigé ex 10
a)

$$\frac{3}{8} \;/\; \frac{11}{120} \;/\; \frac{13}{720}$$

b)

$$\frac{x^3}{8!} \;/\; \frac{x^4}{10!} \;/\; \frac{x^5}{12!}$$

Corrigé ex 11
$r = \frac{2}{3}$ *et* $n = 6$.

Corrigé ex 12
$S_{10} = 15345$

Corrigé ex 13
$S_{\infty} = 45$

Corrigé ex 14

$$C_0 \left(1 + \frac{\tau}{12}\right)^{12t}$$

Corrigé ex 15
Formons le tableau 1.
La somme de chaque colonne correspond à la valeur du capital.
Nous sommes ainsi amené à calculer la somme des termes d'une progression géométrique de raison $1+\tau$ et de terme initial $C_0(1+\tau)$:

$$C_0 \, \frac{(1+\tau)^n - 1}{\tau} \, (1+\tau)$$

Table 1: annuites

fin an	1	2	3	4
	$C_0(1+\tau)$	$C_0(1+\tau)^2$	$C_0(1+\tau)^3$	$C_0(1+\tau)^4$
		$C_0(1+\tau)$	$C_0(1+\tau)^2$	$C_0(1+\tau)^3$
			$C_0(1+\tau)$	$C_0(1+\tau)^2$
				$C_0(1+\tau)$

Corrigé ex 16

$$\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Corrigé ex 17
1) $m_0 = m(0) = 10$ *mg.*
2) $m(8) = 10 \cdot 0,8^8 \approx 1,68$ *mg.*
3) $\dfrac{m(t+1)}{m(t)} = 0,8$*, donc 20% de médicament est éliminé.*

Corrigé ex 18
$M = 925,75$.
Intérêt total $= 12 \cdot 30 \cdot M - L = 243'270$.

Corrigé ex 19
1) $T_{amb} = 75°$
$T(0) = 125° \Rightarrow k = 50°$.
$T(0,5) = 100° \Rightarrow c = -2$.
Donc $T(t) = 75° + 50 \cdot 2^{-2t}$ *et* $T(1) \approx 87,5°$, $T(2,5) \approx 76,6°$, $T(3) \approx 75,8°$*. Le graphe de* $T(t)$ *est donné à la figure 14.*

Corrigé ex 20
La figure 15 donne la solution.

Corrigé ex 21
- *On résout l'équation*

$$y(x+T) = 2 \cdot y(x) \Leftrightarrow C \cdot a^{k(x+T)} = 2 \cdot C \cdot a^{kx} \Leftrightarrow a^{k(x+T)} = 2 \cdot a^{kx} \Leftrightarrow$$

$$(kx+kT)\ln(a) = \ln(2) + k\,x\ln(a) \Leftrightarrow k\,T\ln(a) = \ln(2) \Leftrightarrow T = \frac{\ln(2)}{k\ln(a)}$$

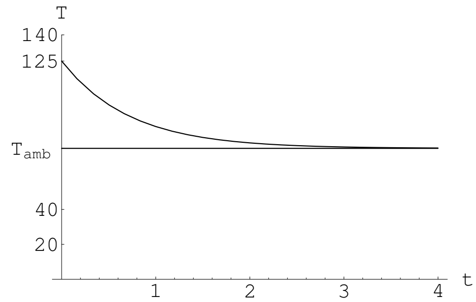


Figure 14: Température en fonction du temps

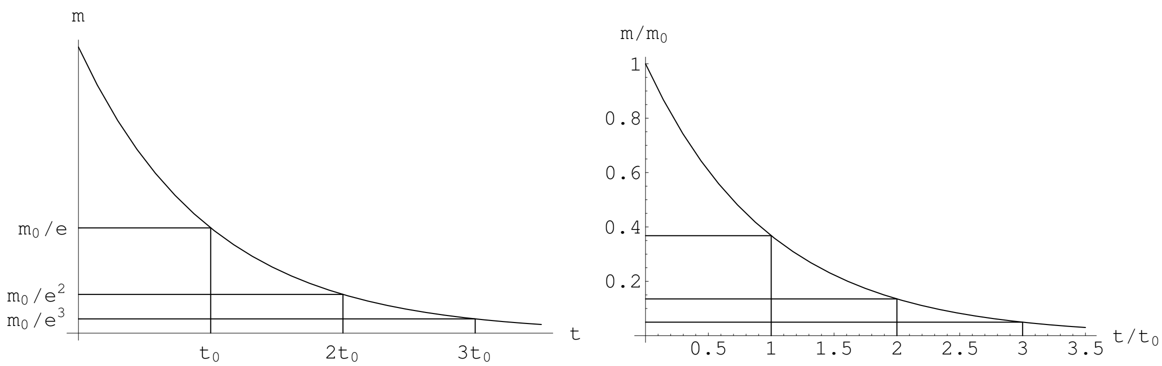


Figure 15: Graphes de $m(t) = m_0\ e^{-t/t_0}$, avec dimensions sur les axes et adimensionel

- *Même type de calcul*

$$T = \frac{\ln(2)}{k\ln(a)}$$

Corrigé ex 22

Remplacer les fonctions hyperboliques par les expressions exponentielles correspondantes.

Corrigé ex 23

$$NC(n) = 1 + [\log(n)]$$

où les $[x]$ est la partie entière de x.

Corrigé ex 24

- *On résout le système*

$$\left\{\begin{array}{rcl} E(1) & = & 0,20 \\ E(10) & = & 0,80 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a\ln(1)+b & = & 0,20 \\ a\ln(10)+b & = & 0,80 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 0,20 \\ a & = & \frac{0,60}{\ln(10)} \approx 0,26 \end{array}\right\}$$

- *Pour obtenir le même effet $E_A = E_B$, il faut doubler la dose $d_A = 2d_B$.*

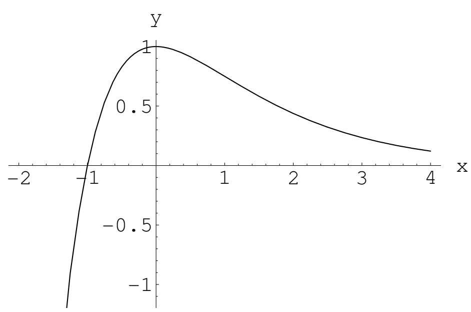
  Les médicaments ayant même mode d'action, cette propriété reste vraie quel que soit l'effet.

  En particulier, pour $E_A = 0,20$, $d_A = 1$, donc $d_B = 0,5$ et pour $E_A = 0,80$, $d_A = 10$, donc $d_B = 5$.

- *On résout le système*

$$\left\{\begin{array}{rcl} E(0,5) & = & 0,20 \\ E(5) & = & 0,80 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a\ln(0,5)+b & = & 0,20 \\ a\ln(5)+b & = & 0,80 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{0,60}{\ln(10)} \approx 0,26 \\ b & = & 0,20+\frac{0,60\ln(2)}{\ln(10)} \approx 0,382 \end{array}\right\}$$

Corrigé ex 25
Lorsque $x \to +\infty$, l'exponentielle tend vers 0 et $f(x)$ tend vers 0.
Lorsque $x \to -\infty$, l'exponentielle tend vers $+\infty$, la parenthèse tend vers $-\infty$ et $f(x)$ tend vers $\mp\infty$ si n est impair et vers $\pm\infty$ si n est pair.
La courbe traverse l'axe Oy en $(0;1)$ et l'axe Ox en $(-1/k;0)$ si n est pair.
Les graphes sont sur la figure (16).



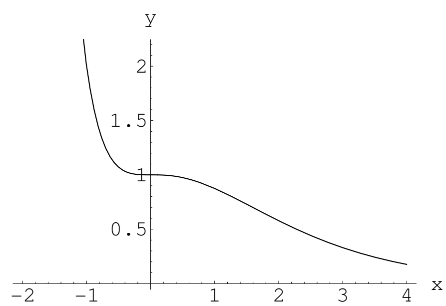


Figure 16: Graphes pour $n=2$ et $n=3$ avec $k=1$.

Corrigé ex 26
$f(\mu - x) = f(\mu + x)$ et ainsi $x = \mu$ est un axe de symétrie.
Lorsque $x \to +\infty$, l'exponentielle tend vers 0 et $f(x)$ tend vers 0.
La courbe ne traverse jamais l'axe Ox.
Elle atteint son maximum quand l'exponentielle est maximale, c'est-à-dire quand $x = \mu$. Alors $f(\mu) = 1$.
Le point sur l'axe Oy est $f(0) = e^{-\mu^2/2}$.

Corrigé ex 27
1) $E = 3\,\log(x) + \log(w) - 2\,\log(y) - 4\,\log(z)$
2) $E = \dfrac{1}{3}\,\log(z) - \log(x) - \dfrac{1}{2}\,\log(y)$

Corrigé ex 28

$$\log\left(\frac{x^2\sqrt[3]{x-2}}{(2x+3)^5}\right)$$

Corrigé ex 29

1. $\log(x) + \log(y) \neq \log(x+y)$

2. $\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

3. $\log\left(\dfrac{x}{y}\right) \neq \dfrac{\log(x)}{\log(y)}$

4. $\log(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\log(x)$

5. $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

6. $\log(xy) \neq \log(x)\log(y)$

7. $\log(x^2) \neq (\log(x))^2$

Corrigé ex 30
On isole la partie exponentielle et on applique le logarithme:

$$\frac{A-D}{B} = 2^{Ct} \Rightarrow \log\left(\frac{A-D}{B}\right) = Ct\log(2) \Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{A-D}{B}\right)}{C\log(2)}$$

Corrigé ex 31
$\log(D) = \log(c) - k\,\log(p) = \log\left(\dfrac{c}{p^k}\right)$, *donc*

$$D = \frac{c}{p^k}$$

Corrigé ex 32
On trouve tout d'abord $k = \dfrac{12M}{12M - Lr}$, *on résout ensuite* $k = (1 + \dfrac{r}{12})^{12t}$ *par rapport à* t *en appliquant le logarithme à chaque membre, on trouve*

$$t = \frac{\log\left(\frac{12M}{12M-Lr}\right)}{12\log\left(1+\frac{r}{12}\right)}$$

Corrigé ex 33
Preuve pour arctanh(x)*:*

$$\text{arctanh}(-\text{x}) = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\,\ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right) = -\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\text{arctanh}(\text{x})$$

Corrigé ex 34
Remplacer dans les formules correspondantes et utiliser les propriétés des logarithmes.

Corrigé ex 35
Ensemble de définition:

1. $\mathbb{R}_+^*$
2. $\mathbb{R}_-^*$
3. $\mathbb{R}^*$
4. $\mathbb{R}_+^*$
5. $\mathbb{R}_-^*$
6. $\mathbb{R}^*$
7. $\mathbb{R}_+^*$
8. $\mathbb{R}_+^*$
9. $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$
10. $\mathbb{R}_+^*$
11. $\mathbb{R}^*$
12. $\mathbb{R}_+^*$

Corrigé ex 36

$$t = -\frac{L}{R}\,\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \frac{L}{R}\,\ln\left(\frac{I_0}{I}\right)$$

Corrigé ex 37
On prend le log de chaque membre:

$$\sqrt{\log(x)}\,\log(x) = 8 \Leftrightarrow (\log(x))^{3/2} = 8 \Leftrightarrow \log(x) = 8^{2/3} = 4 \Leftrightarrow x = 10^4$$

Corrigé ex 38

- $$t = -\frac{L}{R}\ln\left(1 - \frac{IR}{V}\right) = -\frac{L}{R}\ln\left(\frac{V-IR}{V}\right) = \frac{L}{R}\ln\left(\frac{V}{V-IR}\right)$$

En posant $I_1 = \dfrac{V}{R}$ *et* $t_1 = \dfrac{L}{R}$, *on peut écrire:*

$$t = -t_1 \ln\left(1 - \frac{I}{I_1}\right) = t_1 \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{I}{I_1}}\right)$$

- $$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right) = I_1\left(1 - e^{-t/t_1}\right) \Rightarrow y = 1 - e^{-x}$$

- *La figure 17 donne le graphe.*

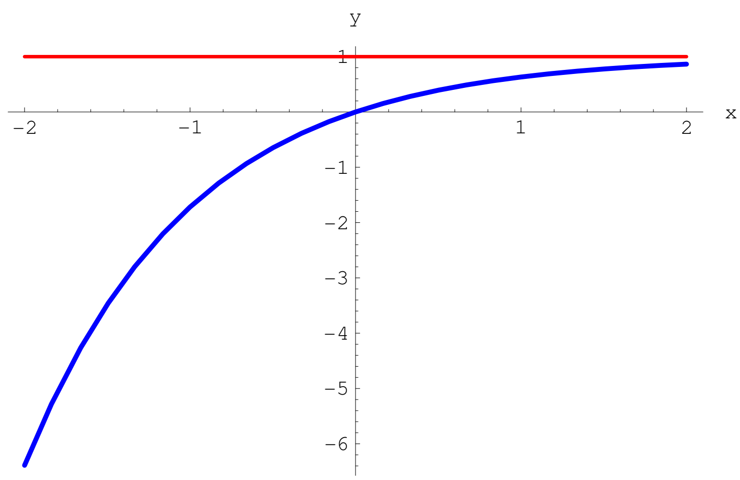


Figure 17: Graphe de $y = 1 - e^{-x}$

Corrigé ex 39
Il faut résoudre le système de deux équations à deux inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcl} T(t_1) & = & T_1 \\ T(t_2) & = & T_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} T_0 + ke^{ct_1} & = & T_1 \\ T_0 + ke^{ct_2} & = & T_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ke^{ct_1} & = & T_1 - T_0 \\ ke^{ct_2} & = & T_2 - T_0 \end{array}\right\}$$

En divisant membre à membre:

$$e^{c(t_1 - t_2)} = \frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}$$

Remarquons que c *n'apparait dans les équations que sous la forme* e^c, *qui vaut*

$$e^c = \left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}\right)^{\frac{1}{t_1 - t_2}} \Rightarrow e^{ct_1} = \left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}\right)^{\frac{t_1}{t_1 - t_2}}$$

$$k = (T_1 - T_0)e^{-ct_1} = (T_1 - T_0)\left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}\right)^{\frac{t_1}{t_2 - t_1}}$$

En substituant k *et en simplifiant l'exposant, on obtient la solution:*

$$T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}^{-\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}}$$

Corrigé ex 40
Réponses:

1. 3 *et* 7
2. $x^3 - 15x + 2 = 0 \Rightarrow x \approx 3.8$
3. *aucune*
4. $\dfrac{1}{7}$
5. *aucune*
6. -2
7. -1 *et* 7
8. -1 *et* 4
9. *L'ensemble de définition est* $x > 5$*, la solution est* 10
10. 1
11. $y = \dfrac{e^C}{x}$
12. $y = C\,x$
13. $(3;4)$ *et* $(4;3)$
14. $(1;3)$ *et* $(3;1)$
15. $(\frac{3}{2}; 10\sqrt{10})$
16. $(10;2)$
17. $(10^6;10)$ *et* $(10^3;10^2)$

8 Annexe: Echelles linéaires et logarithmiques

8.1 Echelles linéaires

Une échelle est linéaire si les **graduations sont en progression arithmétique**, ainsi l'écart (raison) entre deux graduations successives est constant.
La raison et le terme initial sont choisis par l'utilisateur.

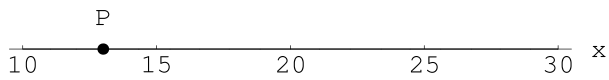


Figure 18: Exemple d'échelle linéaire, terme initial = 10 et raison = 5

Deux questions se posent:

1) **Lecture**: calculer la coordonnée x d'un point P.

2) **Ecriture**: reporter la coordonnée x d'un point P.

Ces deux problèmes sont résolus par une règle de trois (proportion).

8.2 Echelles logarithmiques

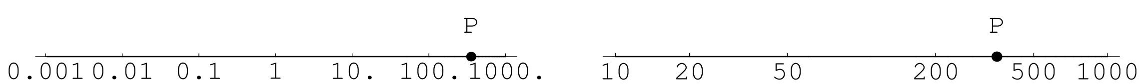


Figure 19: Exemples d'échelles logarithmiques. A gauche: terme initial = 0.001, raison = 10; à droite: terme initial = 10, raison = 100. Le point a la coordonnée 354,8.

Une échelle est logarithmique si les **graduations sont en progression géométrique**; donc le quotient (raison) de deux graduations successives est constant. Le terme initial, en général une puissance de 10, et la raison sont choisis par l'utilisateur.

Ainsi ce sont **les exposants qui sont en progression arithmétique!**

On passe d'une échelle à l'autre en prenant le logarithme décimal ou l'exponentielle de base 10 des graduations (fig. 20).

1) **Lecture**:
Sur l'échelle linéaire $x = 2,55$ donne $X = 10^x = 354,8$, qui est la coordonnée de P.

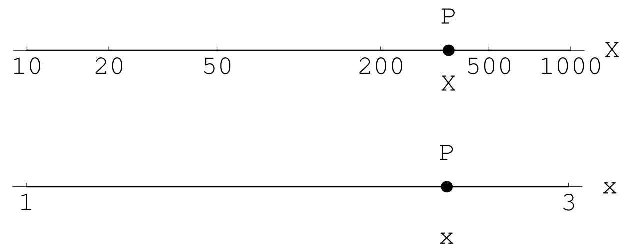


Figure 20: Exemple d'échelles logaritmique et linéaire: $X = 354,8 = 10^{2,55} = 10^x$. On passe de l'échelle logarithmique (exposants) à l'échelle linéaire correspondante en prenant le logarithmique.

2) **Ecriture**:
Une coordonnée $X = 354,8$ donne une valeur de $x = \log(X) = 2,55$.

Dans une échelle logarithmique, il n'y a ni zéro ni valeurs négatives.

8.3 Systèmes d'axes

Les échelles linéaires s'avèrent souvent insuffisantes pour le dessin d'une fonction $y = f(x)$ dont les valeurs de x ou de y prennent (en valeur absolue) de très grandes et/ou de très petites valeurs. Pour y remédier, on introduit des échelles logarithmiques.
Des papiers dits semi-logarithmiques existent : un des axes est linéaire, l'autre est logarithmique. On rencontre donc des graphiques dans des systèmes d'axes lin-lin, lin-log, log-lin et log-log.

8.4 Droites dans un système d'axes lin-log

Une droite représente une fonction exponentielle.

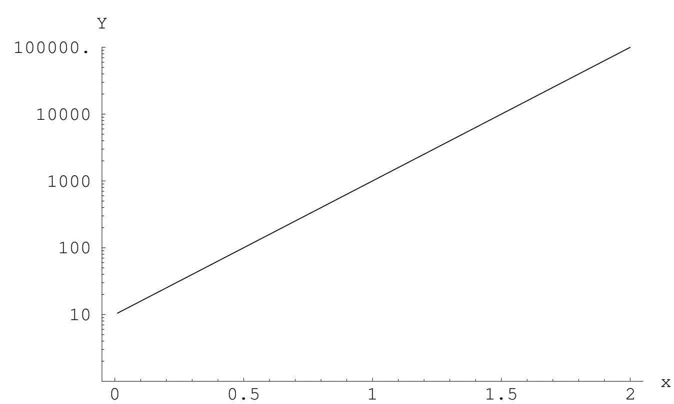


Figure 21: Dessin d'une exponentielle dans un système d'axes lin-log

Sur la figure 21, on peut trouver l'équation de la droite $y = mx + h$ en cherchant deux points.

Par exemple, les points $(1, 1000)$ et $(2, 100000)$ en lin-log (x, Y) correspondent aux points $(1, 3)$ et $(2, 5)$ en lin-lin (x, y), en effet, on a

$$y = \log(Y)$$

La pente vaut alors

$$m = \frac{5-3}{2-1} = 2$$

Pour trouver l'ordonnée à l'origine, on fait passer la droite par le point lin-lin $(1, 3)$, on obtient $h = 1$.
Ainsi l'équation de la droite est

$$y = 2x + 1$$

Cette droite représente une exponentielle, il suffit de poser y = log(Y) pour trouver son équation:

$$y = \log(Y) = 2x + 1 \Rightarrow Y = 10^{2x+1} = e^{\ln(10)(2x+1)} = e^{4.605x+2.3} = 10e^{4.605x}$$

Rappelons la formule de changement de base

$$10^n = \left(e^{\ln(10}\right)^n = e^{\ln(10)n}$$

8.5 Droites dans un système d'axes log-lin

Une droite représente une fonction logarithme.

Par exemple, la droite $y = 2x + 1$ donnera

$$y = 2\log(X) + 1 = 2\log(X) + \log(10) = 2(\log(X) + \frac{1}{2}\log(10)) = 2\log\left(\sqrt{10}\,X\right)$$

Pour trouver l'équation de la droite, à partir du dessin sur un papier log-lin, on transformera les coordonnées de deux points mesurés en points lin-lin à l'aide de

$$x = \log(X)$$

8.6 Droites dans un système d'axes log-log

Une droite représente une fonction puissance.

Par exemple, la droite $y = 2x + 1$ donnera

$$\log(Y) = 2\log(X) + 1 \Rightarrow$$

$$Y = 10^{2\log(X)+1} = 1010^{2\log(X)} = 1010^{\log(X^2)} = 10X^2$$

Pour trouver l'équation de la droite, à partir du dessin sur un papier log-log, on transformera les coordonnées de deux points mesurés en points lin-lin à l'aide de

$$x = \log(X), y = \log(Y)$$

9 Exercices supplémentaires

Exercice 41
Simplifier

1. $2\log 5 + \log 4$
2. $4\log\dfrac{1}{1000} + (\log 100)^2$

Exercice 42
Calculer

1. $\log_2 \dfrac{1}{512}$
2. $\log_3 \sqrt[4]{27}$
3. $\log(\log 10)$
4. $\ln(\ln \frac{1}{2})$

Exercice 43
Vérifier les identités suivantes :

1. $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$
2. $\sinh(2x) = 2\cosh(x)\sinh(x)$

Exercice 44
Simplifier les sommes suivantes:

1. $1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \cdots + e^{10x} \qquad (x \neq 0)$
2. $1 + \log(x) + \log(2x) + \log(3x) + \cdots + \log(10x) \qquad (x > 0)$
3. $1 + 2^{-x} + 2^{-2x} + 2^{-3x} + \cdots + 2^{-nx} \qquad (x \neq 0, n \in \mathbb{N})$

Exercice 45
Quel est le nombre de chiffres (décimaux) du nombre 2^{50000} *?*

Exercice 46
Donner toutes les solutions des équations suivantes :

1. $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
2. $27^{x+2} = 3^{5x+8}$
3. $2 \cdot 2^{6x-1} + 3 \cdot 2^{3x+1} + 9 = 0$
4. $5^{3x} - 7 \cdot 5^x + 6 = 0$
5. $9^x \cdot 2^{2x} = 216^{-1}$
6. $e^{(x^2)} = e^{7x-12}$
7. $\log x - \log(x+1) = 2\log 4$
8. $2^{(x^2)} = 8$
9. $5^x + 125(5^{-x}) = 30$
10. $\log(\log x) = 2$
11. $\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln 9$
12. $\log_3(x+3) + \log_3(x+5) = 1$
13. $\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x}$
14. $\log\sqrt{x} = \log(x-6)$
15. $\log x^2 = \log(6-x)$
16. $2\log x = \log(6-x)$
17. $\log\sqrt[4]{4x+1} = \frac{1}{2}$
18. $\ln(x) + \ln(2x) + \ln(3x) = 0$
19. $\log(x) + \log(2x) = \log(3x)$
20. $(\log_2 x)^2 + \log_8 \frac{x}{2} + \log_{16} 2 = 0$

21. $(\log x)^2 + \log(10x) = 13$

22. $\ln x + \ln 2x = \ln 18$

23. $8 \log_4 x = \log_2(x^2 + 2)$

24. $4e^{-3x} - 5e^{-x} + e^x = 0$

10 Corrigés

Corrigé ex 41

1. $2 \log 5 + \log 4 = 2$
2. $4 \log \frac{1}{1000} + (\log 100)^2 = -8$

Corrigé ex 42

1. $\log_2(1/512) = -9$
2. $\log_3 \sqrt[4]{27} = 3/4$
3. $\log(\log 10) = 0$
4. $\ln(\ln \frac{1}{2}) \notin \mathbb{R}$

Corrigé ex 43

Il faut remplacer les fonctions hyperboliques par leur définition et effectuer.

Corrigé ex 44

1. $(e^{11x} - 1)/(e^x - 1)$
2. $1 + \log(10!) + 10 \log(x)$
3. $(2^{-(n+1)x} - 1)/(2^{-x} - 1)$

Corrigé ex 45

Le nombre de chiffres décimaux de 2^{50000} *est égal à* $\lfloor \log(2^{50000}) \rfloor + 1 = 15052$.

Corrigé ex 46

1. $x = 0$ *et* $x = \ln 3$
2. $x = -1$
3. *pas de sol. dans* $\mathbb{R}$
4. $x = 0$ *et* $x = \log_5 2 = \log 2 / \log 5$
5. $x = -3/2$
6. $x = 3$ *et* $x = 4$
7. *pas de sol. dans* $\mathbb{R}$
8. $x = \pm\sqrt{3}$
9. $x = 1$ *et* $x = 2$
10. $x = 10^{100}$
11. $x = 2\sqrt{3} - 3$
12. $x = -2$
13. $x = 1$ *et* $x = 10^4 = 10000$
14. $x = 9$
15. $x = -3$ *et* $x = 2$
16. $x = 2$
17. $x = 99/4$
18. $x = \sqrt[3]{1/6} = 1/(6^{\frac{1}{3}})$
19. $x = 3/2$
20. $x = 2^{(-1/2)} = 1/\sqrt{2}$ *et* $x = 2^{(1/6)} = \sqrt[6]{2}$
21. $x = 10^{-4} = 1/10000$ *et* $x = 10^3 = 1000$
22. $x = 3$
23. $x = \sqrt{2}$
24. $x = 0$ *et* $x = \ln 2$

11 Bibliographie

- Traité d'Algèbre (Schons - La Procure - Namur)
- The Algebra & Trigonometry Problem Solver REA