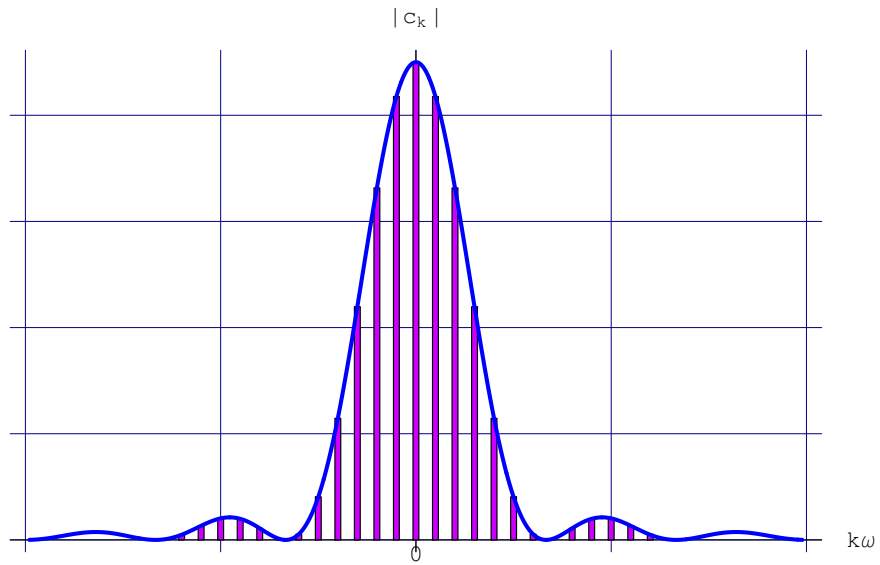


# SÉRIES DE FOURIER

Version 2011

Spectre des amplitudes



1

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Représentations d'une oscillation harmonique</b>	<b>4</b>
2.1	Forme amplitude-déphasage . . . . .	4
2.2	Forme cos-sin . . . . .	5
2.3	Formules d'Euler . . . . .	6
2.4	Passage de la forme amplitude-déphasage à la forme complexe . . . . .	6
2.5	Résumé . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Superposition d'oscillations harmoniques</b>	<b>8</b>
3.1	Polynômes trigonométriques . . . . .	8
3.1.1	Exemples de polynômes trigonométriques . . . . .	9
3.1.2	Représentation spectrale d'un polynôme trigonométrique . . . . .	9
3.2	Séries trigonométriques . . . . .	10
3.3	Séries trigonométriques périodiques . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Coefficients et séries de Fourier d'une fonction périodique</b>	<b>12</b>
4.1	Calcul des coefficients de la série de Fourier . . . . .	12
4.2	Convergence de la série de Fourier et phénomène de Gibbs . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Série de Fourier des fonctions paires ou impaires</b>	<b>16</b>
5.1	Exemple: suite d'impulsions rectangulaires . . . . .	17
5.2	Exemple: suite d'impulsions triangulaires . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Opération sur les séries de Fourier</b>	<b>20</b>
6.1	Linéarité . . . . .	21
6.2	Décalage (ou retard) . . . . .	21
6.3	Dérivation . . . . .	22
6.4	Intégration . . . . .	22
6.5	Exemples . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Identité de Parseval (théorème de la puissance)</b>	<b>25</b>
7.1	Application de l'identité de Parseval . . . . .	28
<b>8</b>	<b>Filtres</b>	<b>29</b>
8.1	Rappels sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants . . . . .	29
8.2	Passage d'un harmonique . . . . .	30
8.3	Passage d'une fonction périodique . . . . .	30
8.4	Analyse d'une fonction de transfert . . . . .	32

# 1 Introduction

Dans l'analyse de Fourier, on retrouve un vieux principe des mathématiques : pour étudier les propriétés d'un "objet", on le décompose en "objets simples" dont les propriétés sont plus faciles à comprendre.

Ici, les "objets" sont les fonctions  $x(t)$  périodiques qui modélisent les signaux physiques et les "objets simples" sont les oscillations harmoniques

$$A \cos(\omega t - \varphi)$$

Le théorème fondamental de la théorie de Fourier dit que "la plupart" des fonctions périodiques  $x(t)$  sont une superposition de telles oscillations.

Mais en quoi ces oscillations harmoniques sont-elles "simples" ? En théorie du signal, un problème fondamental est de connaître l'effet d'un système linéaire stationnaire ( $\equiv$  filtre) sur un signal d'entrée  $x(t)$ :



Pour les oscillations harmoniques, c'est facile : elle est transformée en une oscillation harmonique de même fréquence !



Ayant pu décomposer  $x(t)$  en une superposition d'oscillations harmoniques  $A_i \cos(\omega_i t - \varphi_i)$ , on obtiendra  $y(t)$  en superposant les oscillations harmoniques de sortie  $B_i \cos(\omega_i t - \psi_i)$ .

## 2 Représentations d'une oscillation harmonique

### 2.1 Forme amplitude-déphasage

Une oscillation harmonique est décrite par une fonction cosinusoidale:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (1)$$

avec:

- $A > 0$ : *amplitude* de l'oscillation
- $\omega > 0$ : *pulsation* de l'oscillation
- la *période* est  $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- la *fréquence* est  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$   $\omega = 2\pi f$
- $\omega t - \varphi$  est la *phase*
- $-\varphi$  est la *phase initiale*

#### Remarque :

$\varphi$  est défini à un multiple entier de  $2\pi$  près. On choisit souvent:  $-\pi < \varphi \leq \pi$ .

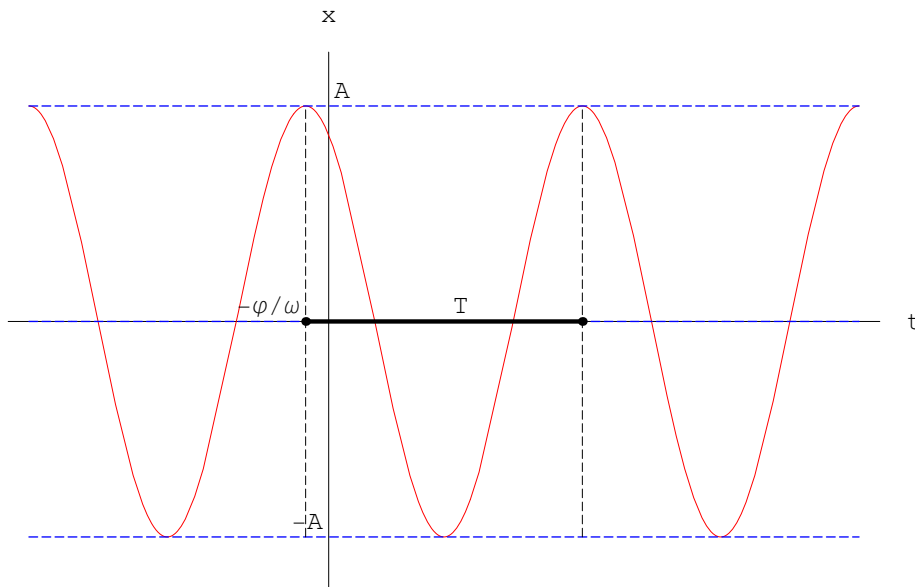


Figure 1: Graphe de  $x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$

#### Interprétation de $\varphi$ :

Le graphe de  $x = A \cos(\omega t - \varphi)$  s'obtient en décalant le graphe de  $A \cos(\omega t)$  de  $\frac{|\varphi|}{\omega}$  à droite si  $\varphi > 0$ , à gauche si  $\varphi < 0$ , celui de  $x = A \cos(\omega t - \varphi)$  en faisant l'inverse.

## 2.2 Forme cos-sin

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (2)$$

Grâce à l'identité trigonométrique

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

on voit qu'il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} a = A \cos(\varphi) \\ b = A \sin(\varphi) \end{cases}$$

L'amplitude est égale à

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3)$$

et la phase initiale est donné par:

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{A},$$

pour obtenir

$$\varphi = \begin{cases} + \arccos\left(\frac{a}{A}\right) & \text{si } b \geq 0 \\ - \arccos\left(\frac{a}{A}\right) & \text{si } b < 0 \end{cases} \quad (4)$$

### Remarque :

L'égalité suivante est toujours valable

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$$

mais elle ne détermine l'angle qu'à  $\pi$  près.

### Remarque :

Certains calculs sont facilités lorsqu'on utilise la forme cos-sin.

Mais les coefficients  $a$  et  $b$  n'ont pas de signification (physique ou géométrique). Il est donc indispensable de savoir calculer  $A$  et  $\varphi$  lorsque  $a$  et  $b$  sont donnés.

### Exemple :

Ecrire  $x(t) = -\sqrt{3} \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$  sous la forme  $x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$  avec  $A > 0$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ .

On trouve  $A = 2$  et  $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ .

Ainsi

$$x(t) = 2 \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

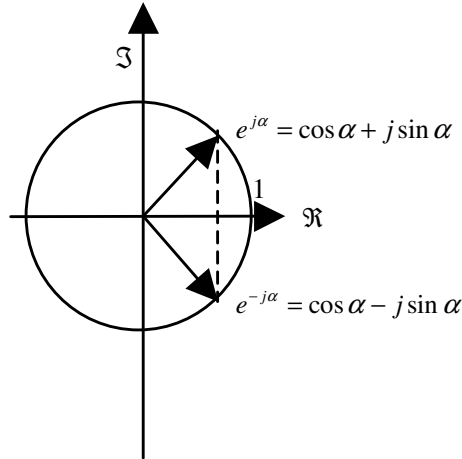
On retiendra aussi les formules très simples:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &\equiv \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \\ -\sin(\alpha) &\equiv \sin(-\alpha) \equiv \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ -\cos(\alpha) &\equiv \cos(\alpha + \pi) \\ \cos(-\alpha) &\equiv \cos(\alpha) \end{aligned}$$

qui permettent de mettre plusieurs fonctions usuelles sous la forme canonique.

### 2.3 Formules d'Euler

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \quad e^{-j\alpha} = \cos(\alpha) - j \sin(\alpha) \quad (5)$$



d'où on tire:

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \quad (6)$$

### 2.4 Passage de la forme amplitude-déphasage à la forme complexe

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) = A \frac{e^{j(\omega t - \varphi)} + e^{-j(\omega t - \varphi)}}{2} = \frac{A}{2} [e^{j\omega t} \cdot e^{-j\varphi} + e^{-j\omega t} \cdot e^{j\varphi}] = \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{j\omega t} + \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot e^{-j\omega t} = c \cdot e^{j\omega t} + c^* \cdot e^{-j\omega t} = c \cdot e^{j\omega t} + (c \cdot e^{j\omega t})^*$$

avec  $c = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$ .

#### Remarque :

Comme  $A > 0$ , on a:  $|c| = \frac{A}{2}$  et  $\arg(c) = -\varphi$ .

#### Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, on a

$$c = \frac{A}{2} e^{-j\varphi} = \frac{2}{2} e^{-\frac{5\pi}{6}j}$$

### 2.5 Résumé

Une oscillation harmonique de pulsation  $\omega$  est décrite sous 3 formes:

$$x(t) = \begin{cases} A \cos(\omega t - \varphi) \\ a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \\ c \cdot e^{j\omega t} + c^* \cdot e^{-j\omega t} \end{cases} \quad (7)$$

**Passages d'une forme à l'autre:**

- complexe  $\leftrightarrow$  amplitude-déphasage :

$$A = 2|c| \quad -\varphi = \arg(c) \quad c = \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \quad (8)$$

- réelle cos-sin  $\rightarrow$  amplitude-déphasage :

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi = \begin{cases} + \arccos\left(\frac{a}{A}\right) & \text{si } b \geq 0 \\ - \arccos\left(\frac{a}{A}\right) & \text{si } b < 0 \end{cases} \quad (9)$$

- amplitude-déphasage  $\rightarrow$  réelle cos-sin :

$$a = A \cos(\varphi) \quad b = A \sin(\varphi) \quad (10)$$

### 3 Superposition d'oscillations harmoniques

#### 3.1 Polynômes trigonométriques

##### Définition 3.1

Un **polynôme trigonométrique**, de période  $T$  et de degré  $\leq N$ , est une fonction de la forme suivante:

**forme réelle amplitude-déphasage:**

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + \dots + A_N \cos(N\omega t - \varphi_N) \quad (11)$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(k\omega t - \varphi_k), \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et } A_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

Le  $k^{\text{ème}}$  terme, à savoir  $A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$  s'appelle le  $k^{\text{ème}}$  **harmonique**.

Le premier de ces harmoniques, obtenu en prenant  $k = 1$ , est la **fondamentale**.

Le terme  $A_0$  est la composante **continue**.

**forme réelle cos-sin:**

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + [a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)] + [a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t)] + \dots + [a_N \cos(N\omega t) + b_N \sin(N\omega t)] \quad (13)$$

##### Remarque :

Noter que la composante continue est

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad (14)$$

**forme complexe:**

$$x(t) = c_0 + [c_1 e^{j\omega t} + c_1^* e^{-j\omega t}] + [c_2 e^{j2\omega t} + c_2^* e^{-j2\omega t}] + \dots + [c_N e^{jN\omega t} + c_N^* e^{-jN\omega t}]$$

On posera

$$c_{-k} = c_k^* \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, N$$

ce qui permet d'écrire:

$$x(t) = c_{-N} e^{-jN\omega t} + \dots + c_{-2} e^{-j2\omega t} + c_{-1} e^{-j\omega t} + c_0 + c_1 e^{j\omega t} + c_2 e^{j2\omega t} + \dots + c_N e^{jN\omega t}$$

ou encore

$$x(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk\omega t} \quad (15)$$

##### Rappel:

Pour  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$c_0 = A_0 = \frac{a_0}{2} \quad c_{-k} = c_k^* \quad |c_k| = \frac{1}{2} A_k \quad \arg(c_k) = -\varphi_k$$



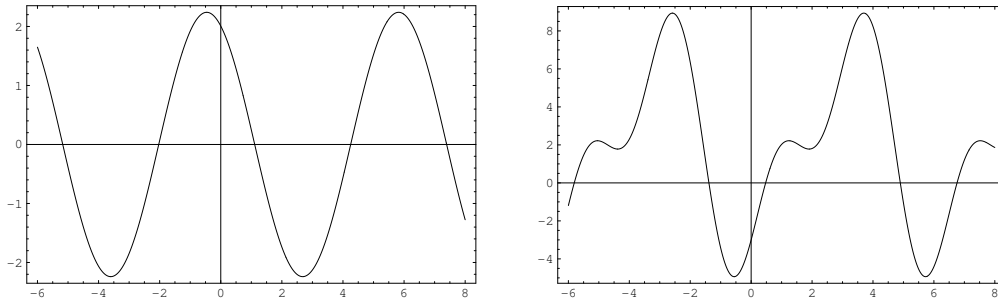


Figure 2:  $x(t) = 2,24 \cos(t + 0,46)$  et  $x(t) = 2 - 5 \cos(t) + 3 \sin(2t)$

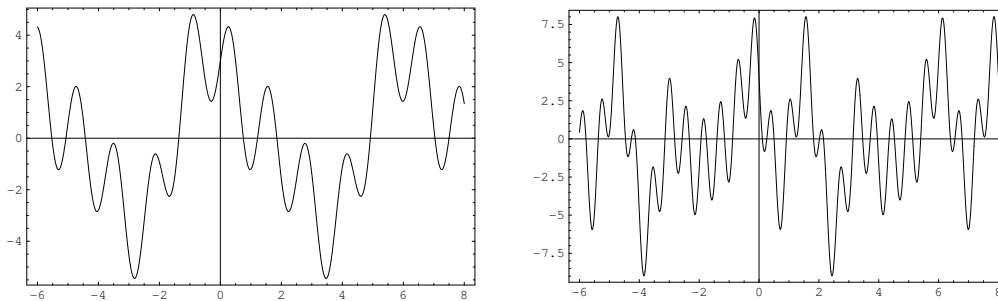


Figure 3:  $x(t) = 3 \cos(t) - \sin(2t) + 2 \sin(5t)$  et  $x(t) = 2 \cos(t) - 3 \sin(3t) + 2 \cos(4t) - 3 \sin(11t)$

### 3.1.1 Exemples de polynômes trigonométriques

### 3.1.2 Représentation spectrale d'un polynôme trigonométrique

Le polynôme trigonométrique

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + \dots + A_N \cos(N\omega t - \varphi_N)$$

peut être représenté par son graphe: c'est la

**représentation dans le domaine temporel.**

**Exemple :**

$$x(t) = 10 + 6 \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Voir la figure (4).

On peut aussi représenter les amplitudes  $A_k$  et les phases initiales  $-\varphi_k$  en fonction des pulsations  $k\omega$ : c'est la

**représentation dans le domaine fréquentiel.**

sous formes réelle ou complexe. Voir la figure (5).

**Remarque :**

On représente souvent aussi la composante continue  $A_0$  sur ces diagrammes.

**Remarque :**

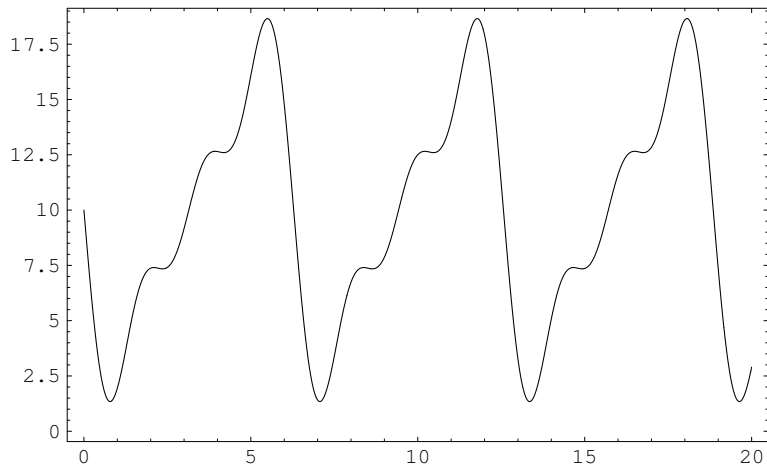


Figure 4:  $x(t) = 10 + 6 \cos(t + \pi/2) + 3 \cos(2t + \pi/2) + 2 \cos(3t + \pi/2)$

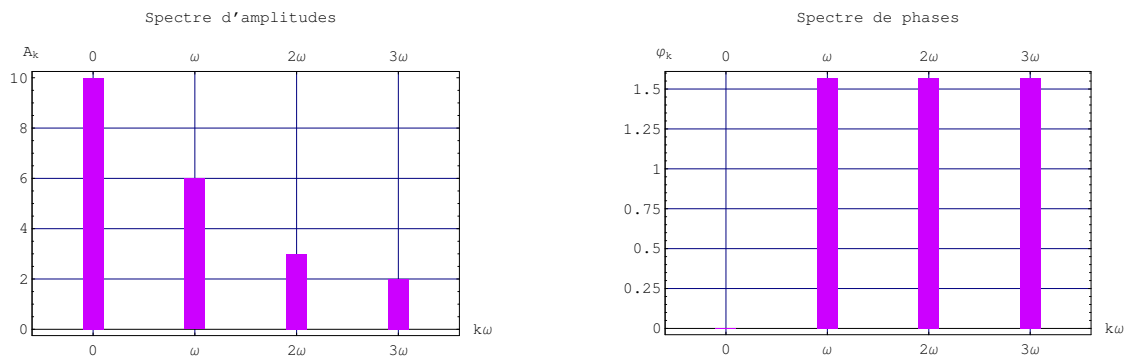


Figure 5:  $x(t) = 10 + 6 \cos(t + \pi/2) + 3 \cos(2t + \pi/2) + 2 \cos(3t + \pi/2)$

La représentation dans le domaine fréquentiel est aussi fidèle que la représentation dans le domaine temporel.

Son intérêt: elle permet de visualiser simplement l'action d'un filtre sur le signal.

**Remarque :**

Les polynômes trigonométriques sont des fonctions infiniment dérivables.

Il y a des fonctions périodiques qui ne sont pas des polynômes trigonométriques:

### 3.2 Séries trigonométriques

Un polynôme trigonométrique est composé d'un nombre *fini* de termes.

Une série trigonométrique est composée d'un nombre *infini* de termes.

**Définition 3.2**

Une *série trigonométrique* de période  $T$  est une série de la forme:

$$x_\infty(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t - \varphi_3) + \dots \quad (16)$$

où

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ et } A_k \geq 0 \text{ (} k = 1, 2, 3, \dots \text{)}$$

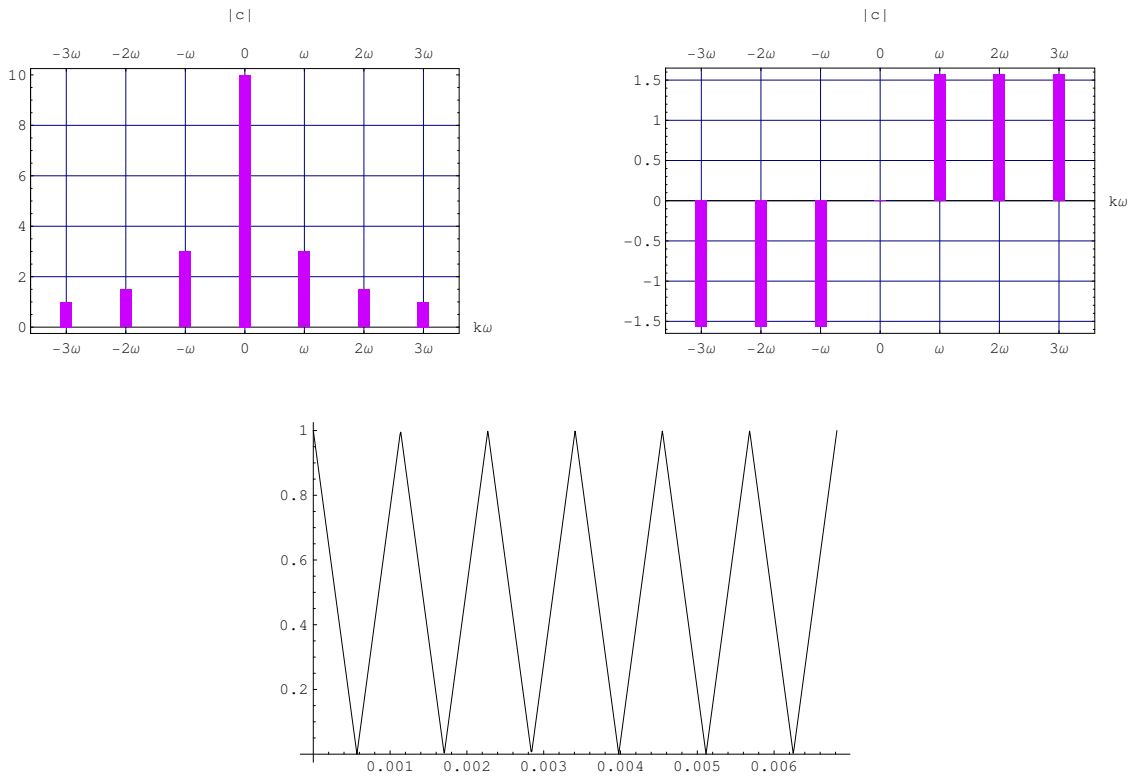


Figure 6: Cette fonction périodique n'est pas un polynôme trigonométrique

Ou encore

$$x_{\infty}(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \varphi_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \quad (17)$$

**Remarques :**

1. Unesomme infinie ne converge pas nécessairement. Plus précisément, si pour une valeur de  $t$  fixée la convergence a lieu, c'est, par définition la valeur de la série en  $t$ .
2. Comparées aux polynômes trigonométriques, les séries trigonométriques donnent lieu à une gamme beaucoup plus riche de fonctions.

Par exemple, elles peuvent être discontinues ou avoir des points anguleux. Le but de ce cours est de montrer qu'elles suffisent à représenter toutes les fonctions périodiques qui peuvent se présenter à l'ingénieur.

### 3.3 Séries trigonométriques périodiques

Tout polynôme ou série trigonométrique n'est pas périodique.

**Exemples :**

$$f_1(t) = 2 + 7 \cos\left(\frac{1}{2} t + \theta_1\right) + 3 \cos\left(\frac{2}{3} t + \theta_2\right) + 5 \cos\left(\frac{7}{6} t + \theta_3\right)$$

$$f_2(t) = 2 \cos(2t + \theta_1) + 5 \sin(\pi t + \theta_2)$$

$$f_3(t) = 3 \sin(3\sqrt{2}t + \theta_1) + 7 \cos(6\sqrt{2}t + \theta_2)$$

$f_1$  et  $f_3$  sont des polynômes trigonométriques périodiques alors que  $f_2$  ne l'est pas.

Le critère est le suivant:

**Le rapport de toutes les pulsations doit être rationnel**

Si c'est le cas alors la période est donnée par le rapport  $\frac{D}{M}$  où  $D$  est le plus grand commun diviseur des numérateurs des pulsations et  $M$  est le plus petit commun multiple des dénominateurs.

Pour  $f_1$ , on a les pulsations  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$  et  $\frac{7}{6}$ , donc  $D = 1$  et  $M = 6$ . Donc la pulsation fondamentale est  $\frac{1}{6}$ . Remarquons qu'elle ne figure pas dans le polynôme.

Pour  $f_3$ , on a les pulsations  $\frac{3\sqrt{2}}{1}$  et  $\frac{6\sqrt{2}}{1}$ , donc  $D = 3\sqrt{2}$  et  $M = 1$ . Donc la pulsation fondamentale est  $3\sqrt{2}$ .

## 4 Coefficients et séries de Fourier d'une fonction périodique

### 4.1 Calcul des coefficients de la série de Fourier

Le problème est le suivant:

**Donné :** Une fonction  $f$  périodique de période  $T$ .

**Cherché :** Un polynôme trigonométrique  $p_N$  d'ordre  $N$ , voir formule (13) qui donne une "bonne" approximation de  $f$ , voir (fig. 7).

Mais que veut dire une "bonne" approximation?

Il s'agit ici de *l'approximation au sens des moindres carrées*:  $p_N$  est le polynôme trigonométrique d'ordre  $N$  tel que le nombre

$$S = \int_0^T [f(t) - p_N(t)]^2 dt$$

soit minimum.

Pour comprendre cette notion, faire les deux exercices suivants:

**Exercice 1 :**

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{si } \pi < t < 2\pi \end{cases} \quad f(t) \text{ } 2\pi\text{-périodique}$$

Déterminer  $p_1(t) = A \sin(t)$  pour obtenir la meilleure *approximation de  $f(t)$  au sens des moindres carrées*, voir (fig. 8).

Réponse:

$$A = \frac{4}{\pi}$$

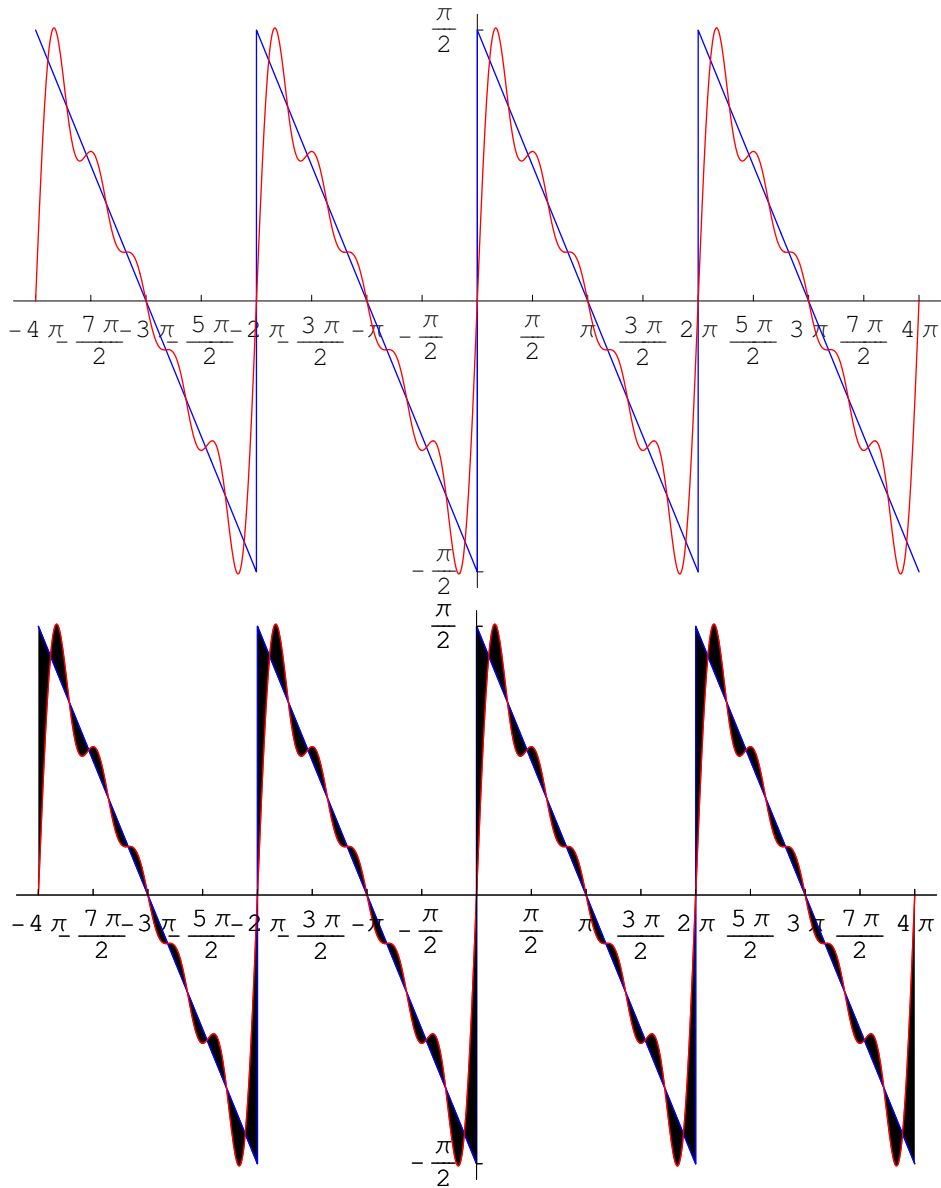


Figure 7: Un polynôme trigonométrique approxime une fonction périodique en dent de scie. Il faut minimiser l'aire au carré située entre les deux courbes.

**Exercice 2 :** Soit  $f(t)$  une fonction sur  $[0, T]$

Déterminer la constante  $M$  qui approxime le mieux  $f(t)$  sur  $[0, T]$  au sens des moindres carrés, voir (fig. 9).

Réponse:

$M$  est la moyenne de la fonction sur une période.

**Principe.** On considère  $S$  comme une fonction des coefficients de  $p_N$ . On résoud ensuite le système d'équations linéaires obtenu en annulant les dérivées partielles de  $S$ .

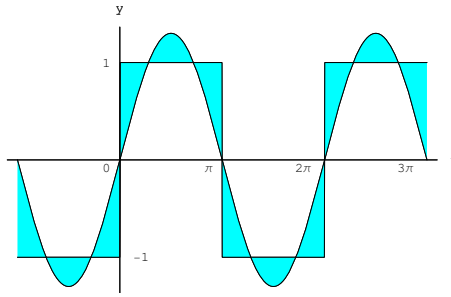


Figure 8: Approximation de  $f(t)$  par un sinus  $A \sin(t)$ .

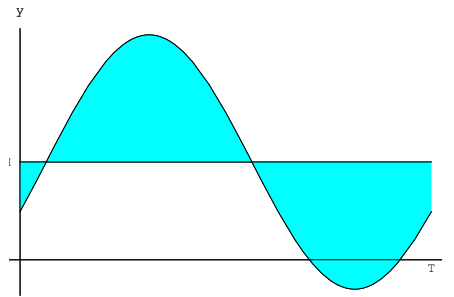


Figure 9: Approximation de  $f(t)$  par une constante  $M$ .

**Remarque :**  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  car  $p_N$  doit avoir la même période que  $f$ .

Les coefficients  $a_0, a_n, b_n$  ( $0 < n \leq N$ ) sont à déterminer pour que  $S = \int_0^T [f(t) - p_N(t)]^2 dt$  soit minimum. Pour cela, on impose les  $2N + 1$  conditions:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial b_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, N)$$

Il faut dériver sous le signe intégral et inverser la matrice  $2N + 1/2N + 1$  du système résultant, on trouve les résultats suivants:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (18)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad (19)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (20)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (21)$$

**Rappels:**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad c_0 = A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_{-k} = c_k^* \quad |c_k| = \frac{1}{2} A_k \geq 0 \quad \arg(c_k) = -\varphi_k$$

### Définitions 4.1

1. Les coefficients  $c_k$  sont les **coefficients de Fourier complexes** de  $f$ .
2. Le polynôme trigonométrique

$$p_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk\omega t}$$

est le **développement de Fourier d'ordre N** de la fonction  $f$  sous forme complexe.

3.

$$p_\infty(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \quad (22)$$

est la **série de Fourier** sous forme complexe de la fonction  $f$ .

4. Les coefficients  $a_0, a_k, b_k$  sont les **coefficients de Fourier réels** de  $f$ .
5. Le polynôme trigonométrique

$$p_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \quad (23)$$

est le **développement de Fourier d'ordre N** de la fonction  $f$  sous forme réelle.

6.

$$p_\infty(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \varphi_k) \quad (24)$$

est la **série de Fourier** sous forme réelle de la fonction  $f$ .

**Remarque :** La composante continue est

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt;$$

donc  $c_0 =$  **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[0, T]$ .

### 4.2 Convergence de la série de Fourier et phénomène de Gibbs

Pour une fonction périodique  $f$  de période  $T$ , continue en un réel  $t$ , dérivable à droite et à gauche en  $t$ , le **théorème de Dirichlet** affirme que la série de Fourier  $S(f)$  évaluée en  $t$  converge vers la valeur de la fonction  $f(t)$ .

$$S(f)(t) = f(t)$$

Les hypothèses peuvent être affaiblies.

La fonction  $f$  peut seulement être continue à gauche et à droite en  $t$  et à variation bornée<sup>2</sup> sur un voisinage de  $t$ .

Dans ce cas,  $f(t)$  doit être remplacé par la valeur moyenne de  $f$  en  $t$ , soit donc la moyenne entre ses limites à droite et à gauche en  $t$ , c'est -à-dire le milieu du saut.

$$S(f)(t) = \frac{f(t_-) + f(t_+)}{2}$$

---

<sup>2</sup>Cela signifie, qu'il existe un intervalle autour de  $t$  sur lequel la somme des sauts, en valeurs absolues, aux points de discontinuité, est finie.

Le phénomène de Gibbs est un effet de bord observé au voisinage d'une discontinuité de la fonction. La convergence est d'autant meilleure que la fonction  $f$  est lisse, et c'est au voisinage d'un saut que la convergence sera la moins bonne.

- a) Là où  $f(t)$  est continue, la série de Fourier converge vers  $f(t)$
- b) Là où  $f(t)$  a un saut, la série de Fourier converge vers le milieu du saut.

C'est au voisinage d'un saut que l'approximation est la moins bonne: "juste avant" et "juste après" le saut,  $p_N(t)$  "dépasse"  $f(t)$  d'une grandeur qui dépend de la hauteur du saut (environ 9% du saut), mais qui ne diminue pas lorsque  $N$  augmente. C'est ce qu'on appelle le **phénomène de Gibbs**.

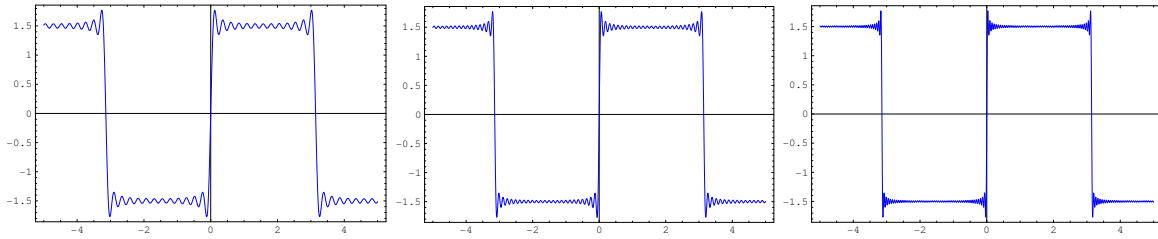


Figure 10: Phénomène de Gibbs,  $N = 25, 50, 100$ .

## 5 Série de Fourier des fonctions paires ou impaires

**Remarque :** Le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique  $f$  peut être un long travail. On le simplifiera en utilisant les **symétries** de la fonction  $f$ :

1. On dit que  $f$  est une fonction **paire** si on a:

$$f(-t) \equiv f(t)$$

pour toute valeur de  $t$ .

**Exemples :**

$\cos(\omega t)$ ,  $\cosh(t)$ ,  $t^n$  avec  $n$  pair.

Si  $f$  est une fonction **paire**, on a pour tout  $k$ :

$$b_k = 0 \quad \text{et} \quad a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad (25)$$

De plus:

$$c_k = \frac{1}{2} a_k \quad k \geq 0$$

$c_k$  est réel!



2. On dit que  $f$  est une fonction **impaire** si on a:

$$f(-t) \equiv -f(t)$$

pour toute valeur de  $t$ .

**Exemples :**

$\sin(\omega t)$ ,  $\sinh(t)$ ,  $\arctan(t)$ ,  $t^n$  avec  $n$  impair.

Si  $f$  est une fonction **impaire**, on a pour tout  $k$ :

$$a_k = 0 \quad \text{et} \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (26)$$

De plus:

$$c_k = -\frac{1}{2} j b_k \quad k \geq 1$$

$c_k$  est purement imaginaire!

**Autre critère:**

$$\begin{aligned} c_{-k} &= +c_k && \Leftrightarrow \text{paire} \\ c_{-k} &= -c_k && \Leftrightarrow \text{impaire} \end{aligned}$$

### 5.1 Exemple: suite d'impulsions rectangulaires

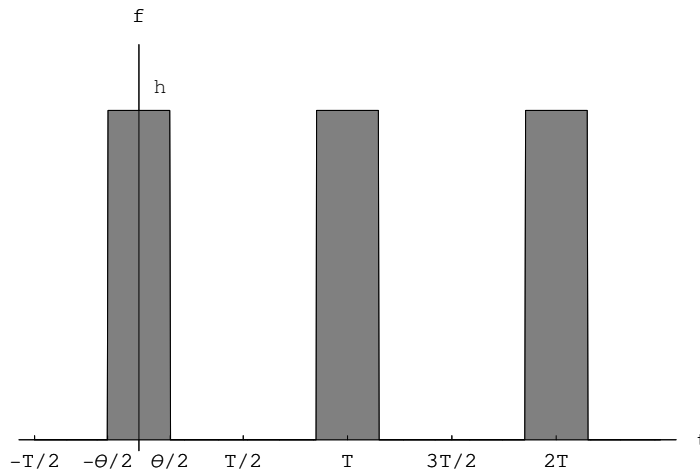


Figure 11: période  $T$ , durée de l'impulsion  $\theta$ .

Comme  $f$  est une fonction *paire*, son développement de Fourier ne contient que des cosinus;

$$b_k = 0 \quad (k \geq 1)$$

Composante continue:  $A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} h \theta$ .

Pour  $k \geq 1$ , on a:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} h \cos(k\omega t) dt = \frac{4h}{T} \int_0^{\theta/2} \cos(k\omega t) dt = \frac{4h}{T} \left[ \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} \right]_0^{\theta/2} =$$

$$\frac{4h}{T} \frac{\sin(k\omega \frac{\theta}{2})}{k\omega} \quad (\text{amplifions par } \frac{\theta}{2}) = \frac{2h\theta}{T} \frac{\sin(k\omega \frac{\theta}{2})}{k\omega \frac{\theta}{2}}$$

Ainsi

$$a_k = 2h \frac{\theta}{T} \text{sinc}(k\pi \frac{\theta}{T})$$

où

$$\text{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \quad \text{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

est le **sinus cardinal**, non normalisé ou normalisé.

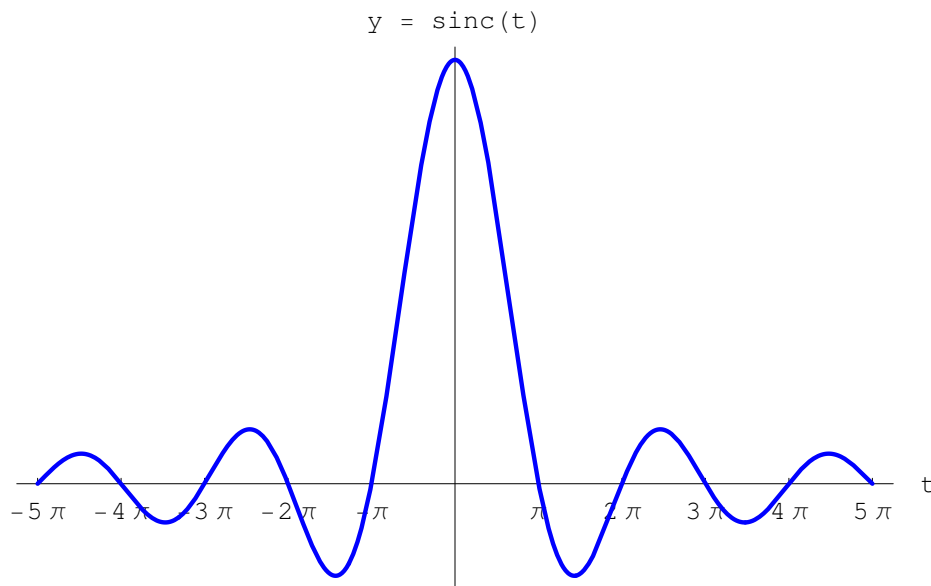


Figure 12:  $y = \text{sinc}(t)$ .

On a donc:

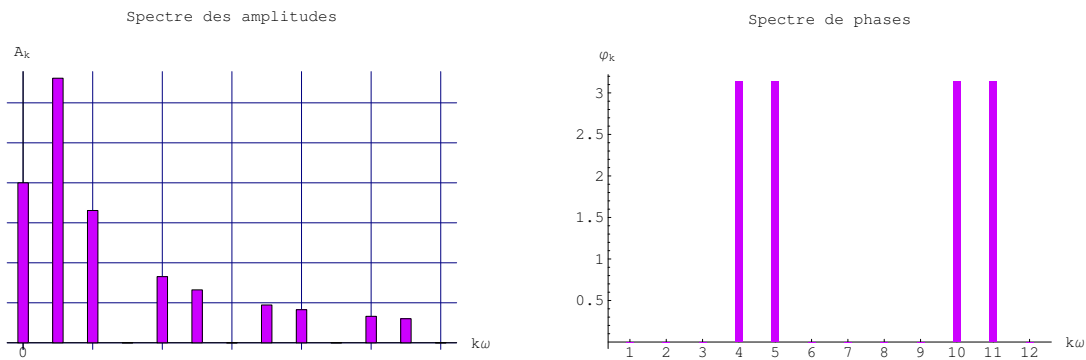
$$p_\infty(t) = h \frac{\theta}{T} + 2h \frac{\theta}{T} \left\{ \text{sinc}\left(\frac{\theta}{T} \pi\right) \cdot \cos(\omega t) + \text{sinc}\left(2 \frac{\theta}{T} \pi\right) \cdot \cos(2\omega t) + \dots \right\}$$

**Spectre de  $f$  :**

$$A_0 = \frac{\theta}{T} h; \quad A_k = 2 \frac{\theta}{T} h \cdot \left| \text{sinc}\left(k \frac{\theta}{T} \pi\right) \right|$$

$$\varphi_k = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{sinc}\left(k \frac{\theta}{T} \pi\right) > 0 \\ \pi & \text{si } \text{sinc}\left(k \frac{\theta}{T} \pi\right) < 0 \end{cases}$$

**Exemple :**  $\frac{\theta}{T} = \frac{1}{3}$ ,  $h = 3$ ,  $T = 1$ ,  $A_0 = 1$ ;  $A_k = 2 \left| \text{sinc}\left(k \frac{\pi}{3}\right) \right|$



Spectre des amplitudes

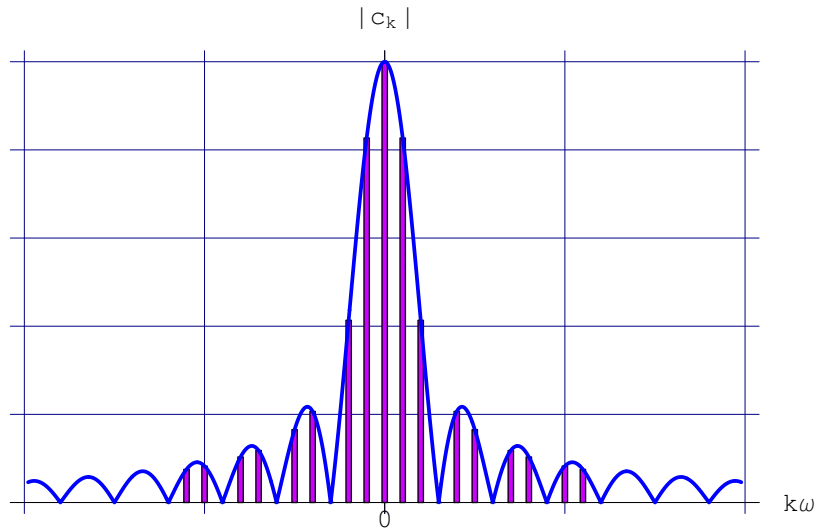


Figure 13: Suite d'impulsions rectangulaires: spectre.

## 5.2 Exemple: suite d'impulsions triangulaires

Comme  $f$  est une fonction *paire*, son développement de Fourier ne contient que des cosinus;

$$b_k = 0 \quad (k \geq 1)$$

Composante continue:  $A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2T} h \theta$ .

Pour  $k \geq 1$ , on a:

$$a_k = \frac{4hT \sin^2\left(\frac{k\pi\theta}{2T}\right)}{k^2\pi^2\theta} = h \frac{\theta}{T} \text{sinc}^2\left(\frac{k\pi\theta}{2T}\right)$$

**Exemple :**  $T = 2\pi$ ,  $\theta = 0,6\pi$ ,  $h = 3$

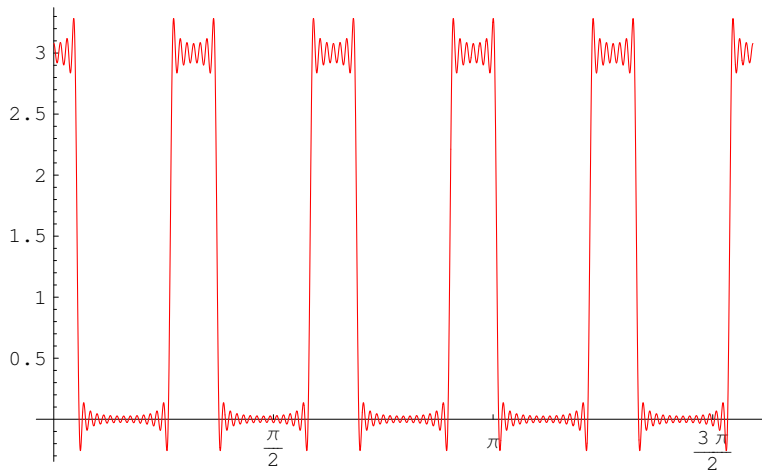


Figure 14:  $y = p_{20}(t)$ .

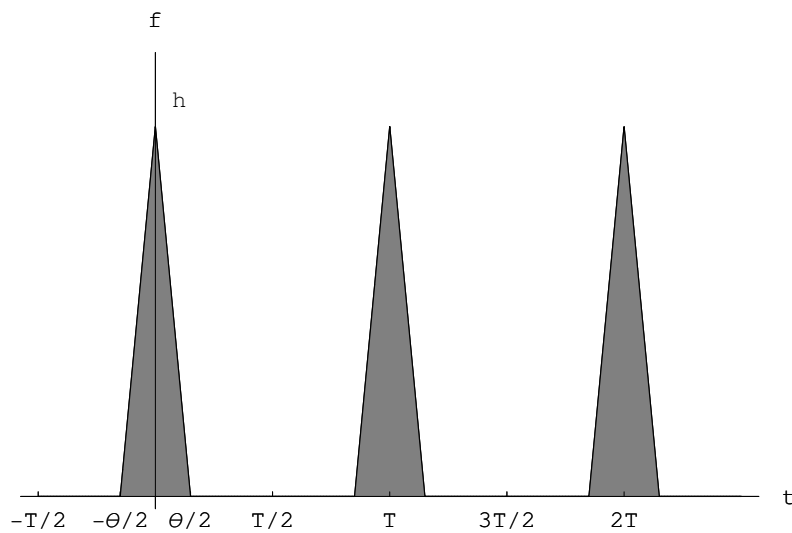


Figure 15: période:  $T$  durée de l'impulsion:  $\theta$ .

## 6 Opération sur les séries de Fourier

1. **Linéarité:** coefficients de Fourier de  $\lambda f(t) + \mu g(t)$ .
2. **Décalage:** coefficients de Fourier de  $f(t - t_0)$ .
3. **Dérivation:** coefficients de Fourier de  $f'(t)$ .
4. **Intégration:** coefficients de Fourier de  $\int_0^t f(u)du$ .

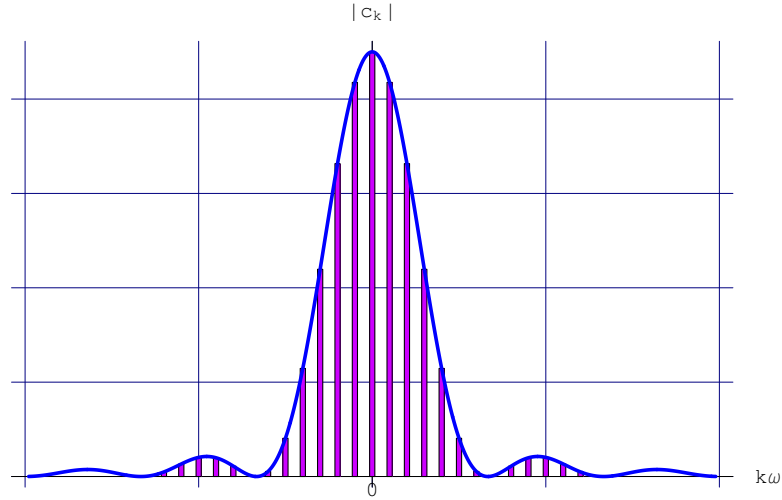


Figure 16: Suite d'impulsions triangulaires: spectre.

## 6.1 Linéarité

$f$  et  $g$  sont 2 fonctions  $T$ -périodiques (même période!)

$$\text{coefficients de Fourier} \begin{cases} \text{de } f : & a_k, b_k, c_k \\ \text{de } g : & \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \end{cases}$$

Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont 2 nombres réels,  $\lambda f(t) + \mu g(t)$  est une fonction  $T$ -périodique dont les coefficients de Fourier sont

$$\lambda a_k + \mu \alpha_k, \lambda b_k + \mu \beta_k, \lambda c_k + \mu \gamma_k$$

## 6.2 Décalage (ou retard)

$f$  est une fonction  $T$ -périodique; coefficients de Fourier de  $f$  :  $a_k, b_k, c_k$ .

Les coefficients de Fourier de la fonction  $g$ , définie par  $g(t) = f(t - t_0)$  sont:

$$\begin{cases} \alpha_k &= \cos(k\omega t_0) a_k - \sin(k\omega t_0) b_k \\ \beta_k &= \sin(k\omega t_0) a_k + \cos(k\omega t_0) b_k \end{cases}$$

qui se notent aussi

$$\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k\omega t_0) & -\sin(k\omega t_0) \\ \sin(k\omega t_0) & \cos(k\omega t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}$$

et

$$\gamma_k = e^{-jk\omega t_0} \cdot c_k$$

Justifions cette dernière relation:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t - t_0) e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} f(u) e^{-jk\omega(u+t_0)} du \quad (u = t - t_0, du = dt) \\ &= e^{-jk\omega t_0} \cdot \frac{1}{T} \int_{-t_0}^{T-t_0} f(u) e^{-jk\omega u} du = e^{-jk\omega t_0} \cdot c_k \end{aligned}$$

Les autres égalités en découlent.

Ainsi

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \Rightarrow f(t - t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega(t-t_0)}$$

### Cas particuliers

- Retard d'une demi-période:  $t_0 = \frac{\pi}{\omega}$

$$\begin{cases} \alpha_k = (-1)^k a_k \\ \beta_k = (-1)^k b_k \\ \gamma_k = (-1)^k c_k \end{cases}$$

- Retard d'un quart de période:  $t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$

$$\gamma_k = e^{-jk\pi/2} c_k$$

–  $k$  pair:

$$\begin{cases} \alpha_k = (-1)^{k/2} a_k \\ \beta_k = (-1)^{k/2} b_k \end{cases}$$

–  $k$  impair:

$$\begin{cases} \alpha_k = (-1)^{(k+1)/2} b_k \\ \beta_k = (-1)^{(k-1)/2} a_k \end{cases}$$

### 6.3 Dérivation

Si  $f$  et  $f'$  sont continues et dérivables par morceaux et si  $f'$  admet des limites à droite et à gauche en tout point, alors on obtient la série de Fourier de  $f'$  en dérivant terme à terme celle de  $f$ .

On obtient alors, avec des notations évidentes:

$$\begin{aligned} a'_k &= +k\omega b_k \\ b'_k &= -k\omega a_k \\ c'_k &= jk\omega c_k \end{aligned}$$

On peut remarquer que

$$a'_0 = c'_0 = 0$$

### 6.4 Intégration

**Question:** Une primitive d'une fonction périodique est-elle périodique?

**Réponse:** Elle l'est si la composante continue est nulle (sinon un terme en  $t$  apparaît)

$$a_0 = 0$$

Cela signifie que la valeur moyenne de  $f$  sur une période est nulle.

Si  $f$  est une fonction  $T$ -périodique développable en série de Fourier, alors la fonction  $F$ , définie par

$$F(t) = \int_0^t f(u) du$$

est aussi développable en série de Fourier et

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t} \Rightarrow F(t) = \gamma_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} c_k \frac{e^{jk\omega t}}{jk\omega}$$

où  $\gamma_0$  = valeur moyenne de  $F$  sur une période, en général non nulle!  
C'est une constante d'intégration, non déterminée par  $f$ .

Ainsi:

$$k \neq 0 \Rightarrow \gamma_k = \frac{1}{jk\omega} \cdot c_k$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(u) du$$

## 6.5 Exemples

### Exemple 1:

Soient les fonctions  $2\pi$ -périodiques:

$$f(t) = t \quad \text{si} \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

et

$$\begin{cases} g(t) = -1 & \text{si} \quad -\pi \leq t < 0 \\ g(t) = 1 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

dont voici les séries de Fourier:

$$f(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin(kt)}{k}$$

$$g(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1}$$

Les fonctions étant impaires, seuls les termes en sinus  $b_k$  sont non-nuls:  
ainsi, pour  $f$ :

$$b_k(f) = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

et pour  $g$ :

$$\begin{cases} b_{2k}(g) = 0 \\ b_{2k-1}(g) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2k-1} \end{cases}$$

La somme des deux fonction,  $h = f + g$  est décrite par

$$\begin{cases} h(t) = -1 + t & \text{si} \quad -\pi \leq t < 0 \\ h(t) = 1 + t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

et admet pour série de Fourier, la somme des séries de  $f$  et  $g$ :

$$h(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin(kt)}{k} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1}$$

**Question:** Quel est le  $k^{\text{ème}}$  terme de  $h$ ?

Pour la fonction  $g$ , seuls les harmoniques impairs sont non nuls, alors que pour la fonction  $f$ , tous les harmoniques apparaissent.

Remarquons que, pour  $f$ , le  $k^{\text{ème}}$  harmonique a l'amplitude  $b_k$ , alors que pour  $g$ , le  $(2k-1)^{\text{ème}}$  a l'amplitude  $b_{2k-1}$ .

Par exemple,  $b_3$  est donné, pour  $f$  par  $k=3$  et pour  $g$ , par  $k=2$ .

Pour répondre à la question, il faut synchroniser les compteurs.

- On peut distinguer si  $k$  est pair ou impair:

$$\begin{cases} b_k(h) = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{2}{k} & \text{si } k \text{ est pair} \\ b_k(h) = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{4}{\pi k} = \frac{2(\pi+2)}{\pi k} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

$k$  représente alors le numéro du  $k^{\text{ème}}$  l'harmonique.

- On renumérote les  $b_k(f)$ :

$$\begin{cases} b_{2k}(h) = 2 \frac{(-1)^{2k+1}}{2k} = -\frac{1}{k} \\ b_{2k-1}(h) = 2 \frac{(-1)^{2k-1+1}}{2k-1} + \frac{4}{\pi(2k-1)} = \frac{2(\pi+2)}{\pi(2k-1)} \end{cases}$$

### Exemple 2:

Ceci est plutôt un contre-exemple.

Soient les fonctions  $2\pi$ -périodiques:

$$\begin{cases} f(t) = -t & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ f(t) = t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g(t) = -t^2 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ g(t) = t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

La série de Fourier de  $f$  est donnée par:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2}$$

On pourrait croire que l'on obtient celle de  $g$  en intégrant celle de  $f$ .

C'est faux, **le théorème ne s'applique pas, car la composante continue de  $f$  n'est pas nulle.**



## 7 Identité de Parseval (théorème de la puissance)

### Définition 7.1

La **moyenne**  $M[f]$  d'une fonction  $T$ -périodique à valeurs réelles  $f$  est le nombre:

$$M[f] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (27)$$

### Définition 7.2

La **valeur efficace**  $V_{\text{eff}}[f]$  d'une fonction  $T$ -périodique à valeurs réelles  $f$  est le nombre défini par:

$$V_{\text{eff}}^2[f] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt \quad (28)$$

La valeur efficace est une moyenne qu'on peut qualifier de quadratique. En effet on a:

$$V_{\text{eff}}[f] = \sqrt{M[f^2]}.$$

### Exemples :

1. Si  $A_0$  est une constante,

$$V_{\text{eff}}[A_0] = |A_0|$$

- 2.

$$V_{\text{eff}}[A \cos(\omega t - \varphi)] = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

### Remarque :

Si  $f$  est à valeurs complexes, il faut remplacer  $f^2$  par  $|f|^2$ :

$$V_{\text{eff}}[f] = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

### Interprétation :

$V_{\text{eff}}^2[f] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt$  représente la **puissance** (normalisée) de  $f$ .

En général, la puissance de la somme de 2 fonctions n'est pas égale à la somme des puissances:

$$V_{\text{eff}}^2[f + g] \neq V_{\text{eff}}^2[f] + V_{\text{eff}}^2[g]$$

En effet

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^2[f + g] &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t) + g(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t)^2 + 2f(t)g(t) + g(t)^2) dt \\ &= V_{\text{eff}}^2[f] + \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt + V_{\text{eff}}^2[g]. \end{aligned}$$

L'égalité sera vérifiée si l'intégrale qui subsiste est nulle.

Ainsi:

$$M[f \cdot g] = 0 \Rightarrow V_{\text{eff}}^2 [f + g] = V_{\text{eff}}^2 [f] + V_{\text{eff}}^2 [g]$$

Cette propriété est une généralisation du théorème de Pythagore bien connu en géométrie et qui justifie la définition suivante.

### Définition 7.3

Deux fonctions  $f$  et  $g$  à valeurs réelles et définies sur un même intervalle  $[a, b]$  sont dites **orthogonales** si

$$M[f \cdot g] = 0$$

### Exemples importants :

1.

$$M[A_0 \cdot A \cos(\omega t - \varphi)] = 0$$

en effet

$$\int_0^T A_0 A \cos(\omega t - \varphi) dt = A_0 A \int_0^T \cos(\omega t - \varphi) dt = 0$$

2. Si  $k \neq \pm l$ :

$$M[A \cos(k\omega t - \varphi) \cdot B \cos(l\omega t - \psi)] = 0$$

en effet

$$\begin{aligned} \int_0^T A \cos(k\omega t - \varphi) B \cos(l\omega t - \psi) dt &= \text{''on linéarise''} \\ &= \frac{AB}{2} \int_0^T (\cos[(k+l)\omega t + \varphi - \psi] + \cos[(k-l)\omega t - \varphi + \psi]) dt = 0 \end{aligned}$$

car  $k+l$  et  $k-l$  sont des entiers  $\neq 0$ , donc on intègre sur un nombre entier de période.

### Conséquence :

Si  $p_N(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$  est un polynôme trigonométrique, on a

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^2 [p_N] &= V_{\text{eff}}^2 [A_0] + \sum_{k=1}^N V_{\text{eff}}^2 [A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)] \\ V_{\text{eff}}^2 [p_N] &= A_0^2 + \sum_{k=1}^N \frac{A_k^2}{2} \end{aligned}$$

Ce résultat se généralise de la façon suivante:

Si  $f$  est une fonction  $T$ -périodique développable en série de Fourier:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$$

alors

$$V_{\text{eff}}^2 [f] = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}.$$

Ce résultat peut se lire de la façon suivante (théorème de la puissance) :

**La puissance du signal est égale à la somme des puissances de sa composante continue et de ses harmoniques.**

Mathématiquement, ce résultat peut s'écrire:

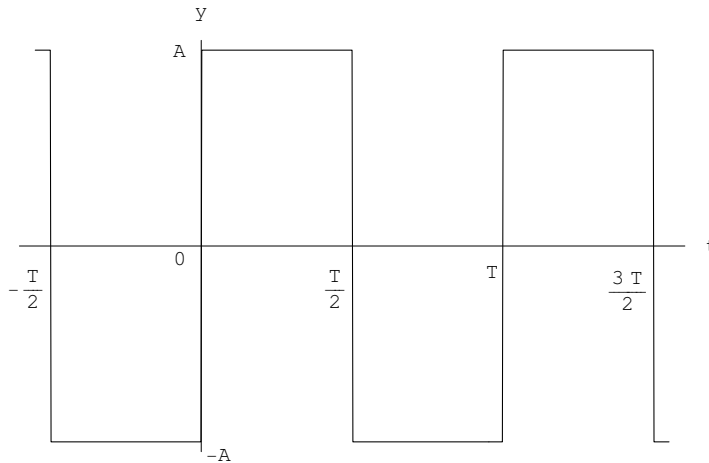
$$V_{\text{eff}}^2 [f] = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \begin{cases} A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \\ \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} \\ \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \end{cases} \quad (29)$$

C'est l'identité de Parseval.

**Remarque :** Le résultat ci-dessus ne fait intervenir que les amplitudes des harmoniques.

**Exemple :** Signal carré

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A & \text{si } \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad f(t) \text{ } T\text{-périodique.}$$



On a:

$$V_{\text{eff}}^2 [f] = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = A^2$$

Série de Fourier:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left[ \frac{\sin(\omega t)}{1} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$

Spectre d'amplitude:

$$A_1 = \frac{4A}{\pi}, A_2 = 0, A_3 = \frac{4A}{\pi} \cdot \frac{1}{3}, A_4 = 0, A_5 = \frac{4A}{\pi} \cdot \frac{1}{5}$$

L'identité de Parseval s'écrit:

$$A^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16A^2}{\pi^2} \left\{ 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right\}$$

**Remarque :** On peut en déduire la jolie égalité:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$$

## 7.1 Application de l'identité de Parseval

On cherche à estimer l'erreur commise en remplaçant  $f$  par son développement de Fourier  $p_N$  d'ordre  $N$ :

On introduit le rapport:

$$\begin{aligned} \lambda_N &= \frac{\text{puissance de } p_N}{\text{puissance de } f} = \frac{V_{\text{eff}}^2 [p_N]}{V_{\text{eff}}^2 [f]} \\ &= \frac{A_0^2 + \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_N^2)}{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt} \end{aligned}$$

$\lambda_N$  indique le pourcentage de puissance du signal qui se trouve déjà dans le développement d'ordre  $N$ .

Dans l'exemple du signal carré ci-dessus on a:

$$\begin{aligned} \lambda_N &= \frac{\frac{8A^2}{\pi^2} (1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{N^2})}{A^2} \\ \lambda_N &= \frac{8}{\pi^2} (1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{N^2}) \quad \text{pour } N \text{ impair.} \end{aligned}$$

N	1	3	5	7	9
$\lambda_N$	81%	90%	93%	95%	96%

## 8 Filtres

Rappelons qu'un filtre est un système linéaire continu et invariant dans le temps. Un filtre est caractérisé par sa fonction de transfert  $H(s)$  (voir transformation de Laplace).

A une excitation (ou entrée)  $x(t)$ , le filtre va donner une réponse (ou sortie)  $y(t)$ .



### 8.1 Rappels sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants

La réponse est donnée par la résolution d'une équation différentielle

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t) \quad (30)$$

La solution générale est donnée par

$$y(t) = y_h(t) + y_0(t)$$

où

$$y_h(t) = C_1 y_1(t) + \dots + C_n y_n(t)$$

est la solution générale de l'équation homogène associée, elle comprend  $n$  constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales.

Dans les cas qui nous intéressent,  $y_h(t)$ , est formée d'exponentielles réelles décroissantes, c'est le régime transitoire, et après un certain temps, seul le régime permanent  $y_0(t)$  va subsister.

Celui-ci est une solution particulière de l'équation (30).

Nous allons étudier le régime permanent en réponse à une excitation périodique, dans le cas où:

**la fréquence du signal d'entrée n'est pas une des fréquences propres du système composant le filtre.**

La réponse est alors donnée par:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \Rightarrow y(t) = B \cos(\omega t - \psi) \quad (31)$$

ou, sous forme complexe:

$$x(t) = \underline{A} e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = \underline{B} e^{j\omega t} \quad (32)$$

Rappelons qu'à l'équation (30) est associée un polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \quad (33)$$

L'hypothèse précédente se traduit par:

$$P(j\omega) \neq 0$$

La fonction de transfert est définie par

$$H(j\omega) = \frac{1}{P(j\omega)}$$

## 8.2 Passage d'un harmonique

$$\underline{B} = H(j\omega) \cdot \underline{A} \quad (34)$$

ou, sous forme réelle,

$$B = |H(j\omega)| \cdot A \quad (35)$$

$$-\psi = \arg(H(j\omega)) - \varphi \quad (36)$$

## 8.3 Passage d'une fonction périodique

Si le signal d'entrée  $x(t)$  est une fonction périodique, il se décompose en série de Fourier, le filtre étant linéaire, sa réponse s'obtient en passant chaque harmonique et en les superposant:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \varphi_k) \Rightarrow y(t) = A'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos(k\omega t - \varphi'_k) \quad (37)$$

ou

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k e^{jk\omega t} \quad (38)$$

avec

$$c'_k = H(j\omega) \cdot c_k \quad (39)$$

$$A'_k = |H(j\omega)| \cdot A_k \quad (40)$$

$$-\varphi'_k = \arg(H(j\omega)) - \varphi_k \quad (41)$$

Cette relation est à mettre en parallèle avec

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

qui lie les transformées de Laplace des fonctions causales  $x(t)$  et  $y(t)$ .

**Exemple** Filtre passe-bas:

Il est régi par l'équation différentielle

$$RC y'(t) + y(t) = x(t)$$

La fonction de transfert est donnée par

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RC j\omega}$$

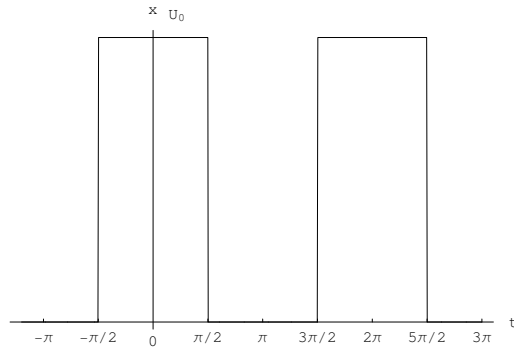


Figure 17:  $x(t)$

Ici,  $\omega = 1$  et la série de Fourier de  $x(t)$  est:

$$x(t) = \frac{U_0}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(k\pi/2) e^{jkt}$$

et celle de  $y(t)$  est donc

$$y(t) = \frac{U_0}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk) \cdot \text{sinc}(k\pi/2) e^{jkt} = \frac{U_0}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}(k\pi/2)}{1 + jRCk} e^{jkt}$$

Le spectre de  $x(t)$  est:

$$A_0 = \frac{U_0}{2}$$

$$A_k = U_0 |\text{sinc}(k\pi/2)| = 0 \quad \text{si } k \text{ est pair,} \quad = \frac{2U_0}{k\pi} \quad \text{si } k \text{ est impair}$$

$$\varphi_k = 0 \quad \text{si } \text{sinc}(k\pi/2) \geq 0, \quad = \pi \quad \text{si } \text{sinc}(k\pi/2) < 0 \quad \text{donc } k = 3, 7, 11, 15, \dots$$

Le spectre de  $y(t)$  est:

$$A'_0 = \frac{U_0}{2}$$

$$A'_k = |H(jk)| A_k = U_0 \frac{|\text{sinc}(k\pi/2)|}{\sqrt{1 + (RCk)^2}}$$

$$-\varphi'_k = \arg(H(jk)) - \varphi_k = -\arctan(RCk) - \varphi_k$$

Valeurs des amplitudes:

$$\begin{pmatrix} A_k(x) : & 0.5000 & 0.6366 & 0 & 0.2122 & 0 & 0.1273 & 0 & 0.0909 & 0 & 0.0707 & 0 & 0.0578 & 0 \\ A_k(y) : & 0.5000 & 0.4501 & 0 & 0.0671 & 0 & 0.0249 & 0 & 0.0128 & 0 & 0.0078 & 0 & 0.0052 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs des phases:

$$\begin{pmatrix} -\varphi_k(x) : & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi & 0 \\ -\varphi_k(y) : & -0.79 & -1.11 & 1.89 & -1.33 & -1.37 & -1.41 & 1.71 & -1.45 & -1.46 & -1.47 & 1.66 & -1.49 \end{pmatrix}$$

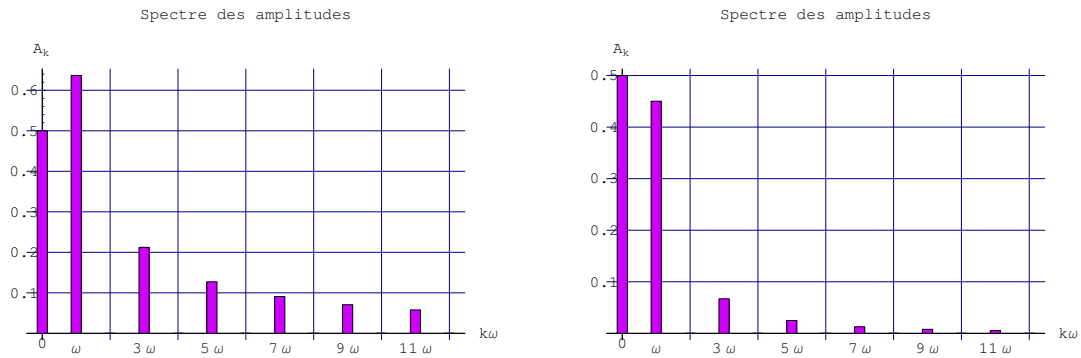


Figure 18: Spectres des amplitudes de  $x(t)$  et  $y(t)$ , avec  $U_0 = R = C = 1$

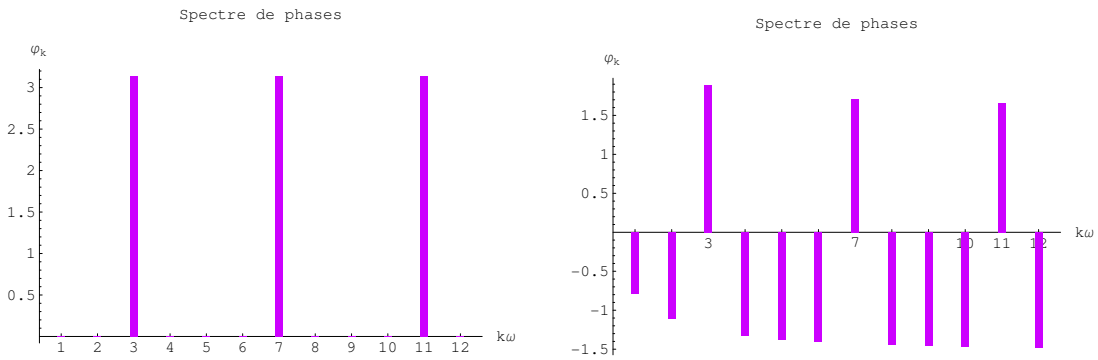


Figure 19: Spectres des phases de  $x(t)$  et  $y(t)$ , avec  $U_0 = R = C = 1$

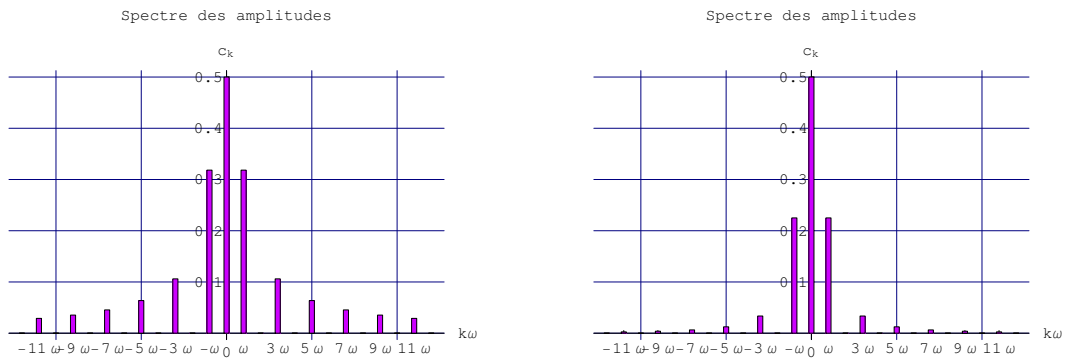


Figure 20: Spectres des amplitudes complexes de  $x(t)$  et  $y(t)$ , avec  $U_0 = R = C = 1$

## 8.4 Analyse d'une fonction de transfert

Les fonctions de transfert rencontrées ici se présentent sous la forme générale:

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)}$$

Il est possible d'interpréter géométriquement les réponses en amplitudes  $|H(j\omega)|$  et en phases  $\arg(H(j\omega))$ .



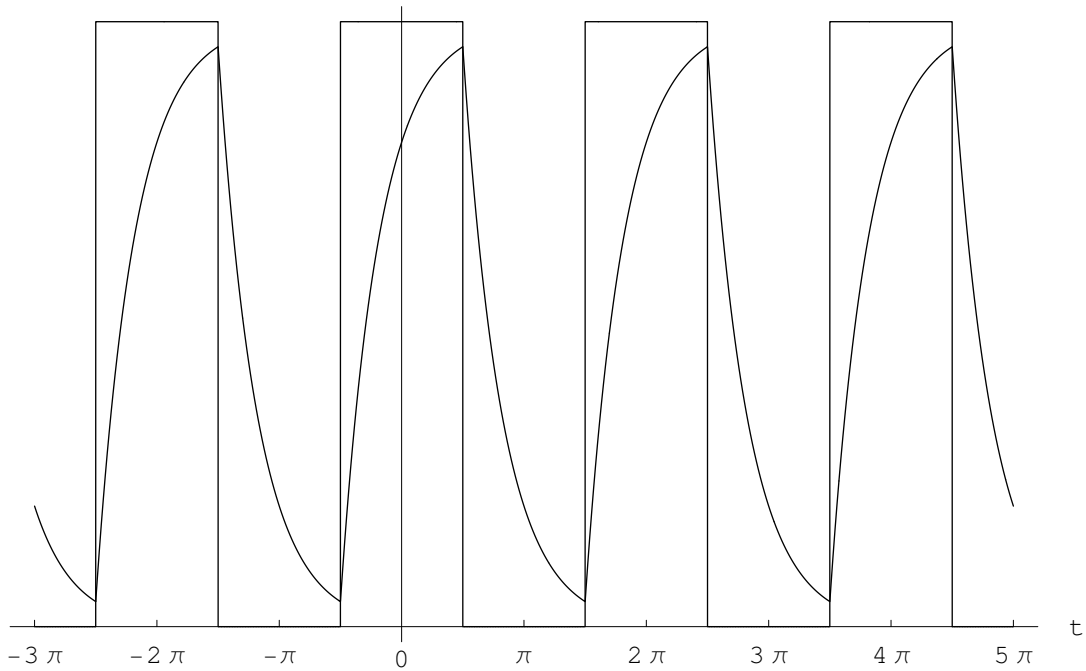


Figure 21: Graphes de  $x(t)$  et  $y(t)$ .

Pour simplifier, prenons une fonction ne possédant qu'un seul pôle  $\lambda = -\alpha + j\omega_0$  (voir figure 22).<sup>3</sup>  
 Dans ce cas

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega - \lambda}$$

et le nombre complexe peut être vu comme un vecteur  $\vec{v}$  reliant le pôle  $\lambda$  au nombre imaginaire  $j\omega$ .

Si  $v$  est la longueur de ce vecteur, alors

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{v}$$

et si  $\theta$  est son angle (négatif sur le dessin),

$$\arg(H(j\omega)) = -\theta$$

Lorsque  $\omega$  vaut 0, la valeur de la réponse en amplitude vaut  $|\lambda|$ , lorsque  $\omega \rightarrow \omega_0$ ,  $v$  va décroître et la réponse va donc augmenter, puis elle va tendre vers 0 lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ . Voir les figures (23).

En faisant varier la partie réelle  $\alpha$  du pôle, la réponse en amplitude va tendre vers l'infini. Voir la figure (24).

Voyons encore le cas de deux pôles avec leurs conjugués:

$$H(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2)(s - \lambda_2^*)}$$

<sup>3</sup>En réalité, le pôle conjugué sera aussi présent, mais cela n'enlève rien au raisonnement ci-dessus.

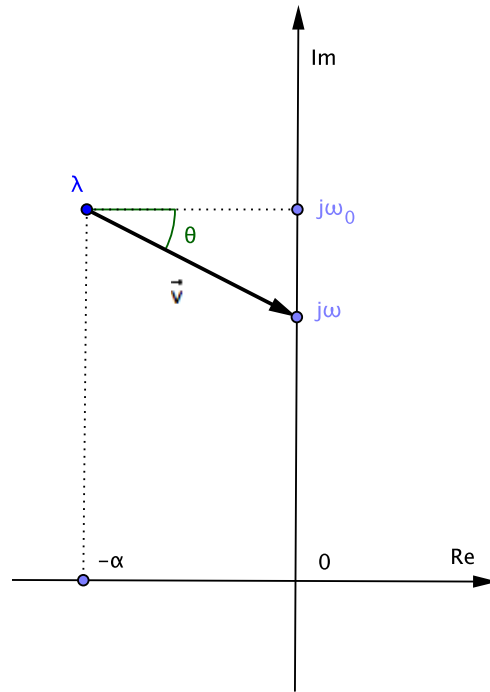


Figure 22: Pôle  $\lambda$  et pulsation imaginaire  $j\omega$ .

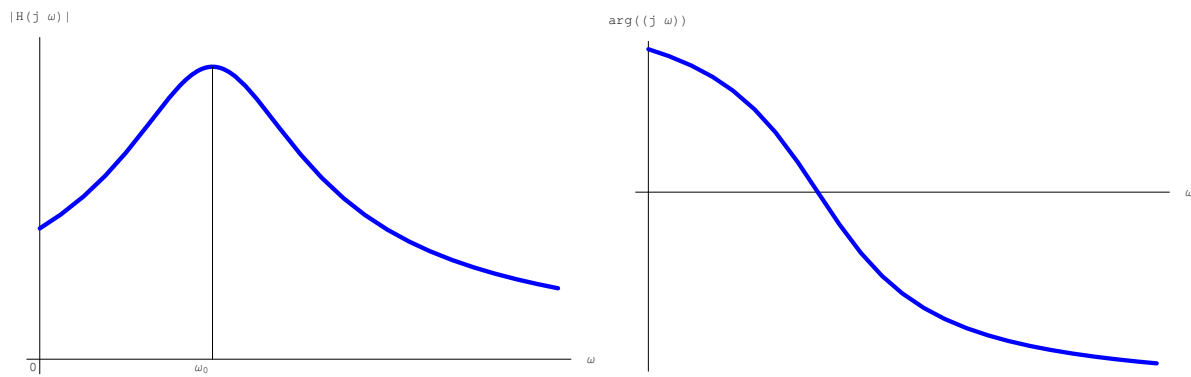


Figure 23: Réponses en amplitude et en phase dans le cas d'un seul pôle,  $\alpha = 0,5$  et  $\omega_0 = 1$ .

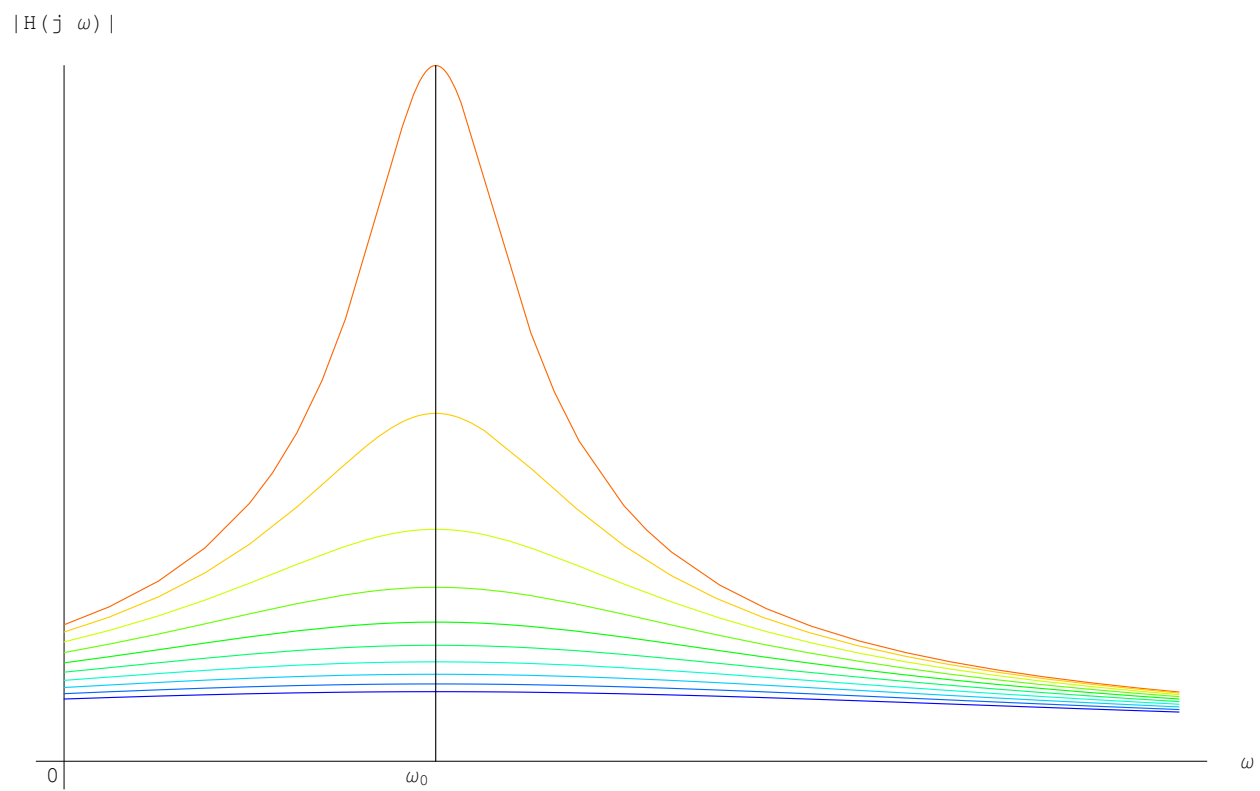


Figure 24: Réponses en amplitude dans le cas d'un seul pôle,  $0, 2 \leq \alpha \leq 2$ ,  $\omega_0 = 1$ .

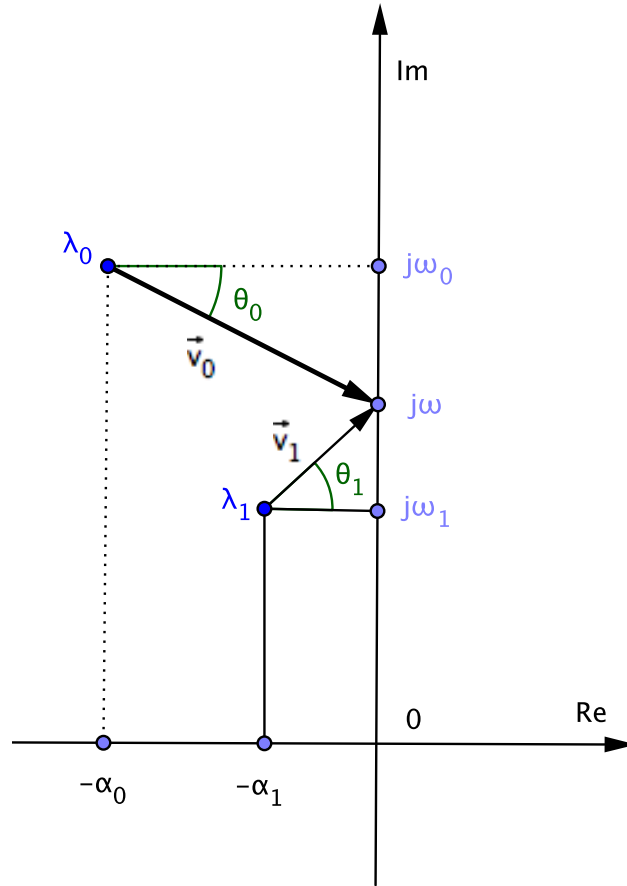


Figure 25: Pôles  $\lambda_0, \lambda_1$  et pulsation imaginaire  $j\omega$ .

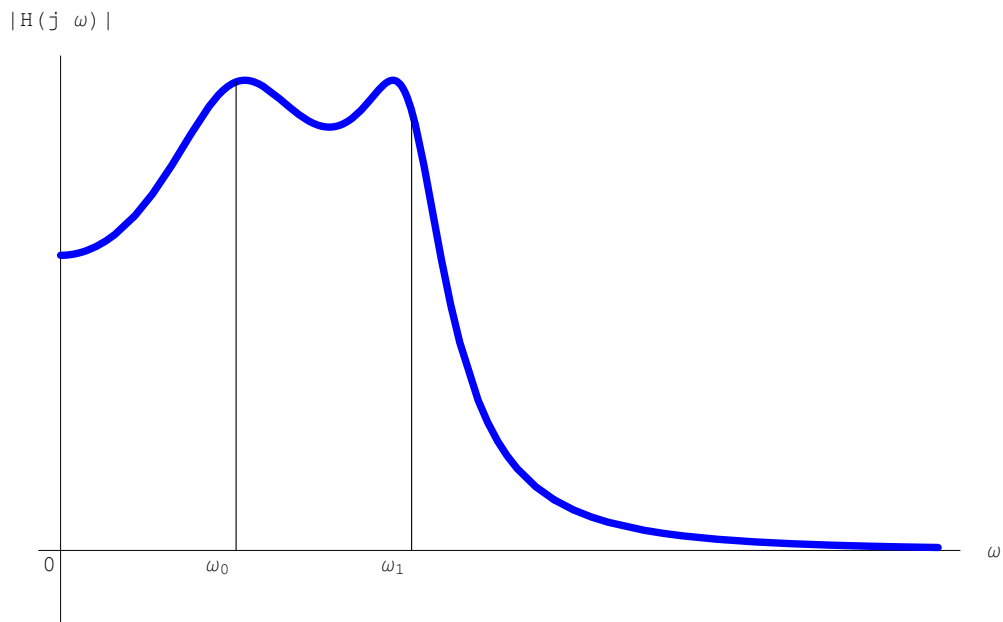


Figure 26: Réponse en amplitude dans le cas de deux pôles,  $\omega_0 = 1, \omega_1 = 2, \alpha_0 = 0,5, \alpha_1 = 0,25$ .