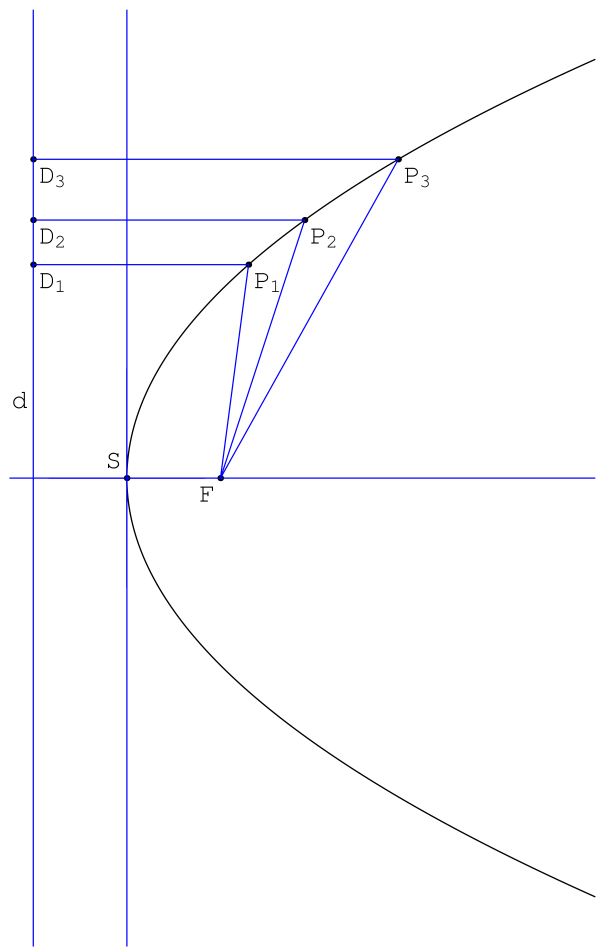
heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

GEOMETRIE ANALYTIQUE

Lang Fred[1]



[1]Version 2012

Table des matières

1 Eléments de géométrie intrinsèque dans le plan

1.1 Médiatrices, cercle circonscrit

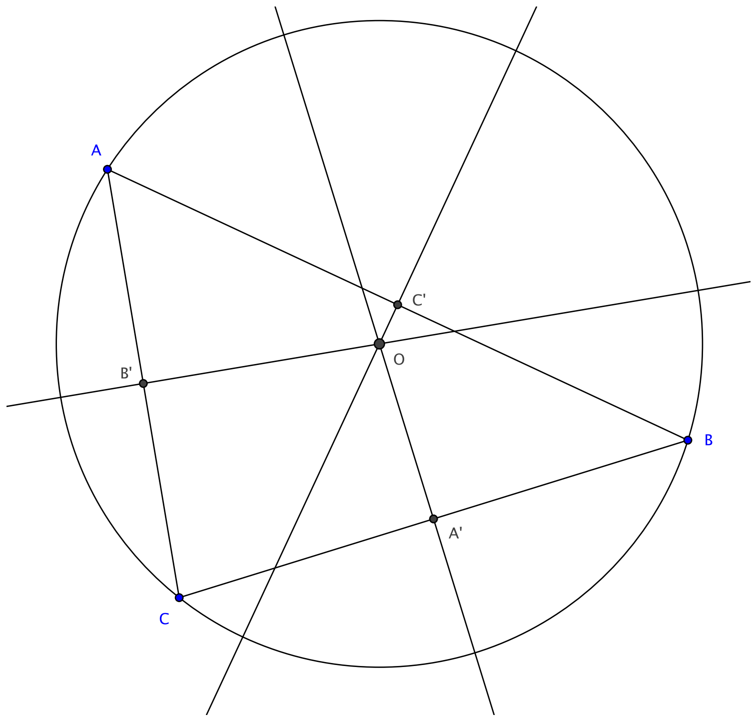


Figure 1: Les médiatrices d'un triangle sont perpendiculaires aux milieux des côtés $A'B'C'$.

Le lieu des points équidistants à deux points fixes A et B est la **médiatrice du segment** AB. Cette droite est perpendiculaire au segment AB en son milieu.

Le lieu des points équidistants à trois points fixes non alignés A, B et C est le **centre O du cercle circonscrit au triangle** ABC. Il est situé à l'intersection des médiatrices du triangle ABC (fig. 1).

Le lieu des points voyant un segment AB sous un angle droit est le cercle de Thalès du segment AB, c'est le cercle de diamètre AB.
Le lieu des points voyant un segment AB sous un angle donné est le double arc capable de AB (fig. 2).

1.2 Bissectrices, cercles inscrit et exinscrits

Le lieu des points équidistants à deux droites fixes a et b est formé des deux **bissectrices des droites** a et b. Ces droites partagent les angles formés par a et b en leurs milieux. Elles sont perpendiculaires entre elles.

Le lieu des points équidistants à trois droites fixes non concourantes a, b et c est formé des quatre **centres** I, I_a, I_b et I_c des **cercles inscrit et exinscrits au triangle** abc.
I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC, où $A = b \cap c, B = c \cap a, C = a \cap b$. Il est à l'intersection des trois bissectrices intérieures du triangle.
I_a est le centre du cercle exinscrit au triangle ABC, il est à l'intersection de deux bissectrices extérieures et de la bissectrice intérieure à l'angle en A. Par rapport au segment BC, le cercle est situé du côté opposé à A (fig. 3).

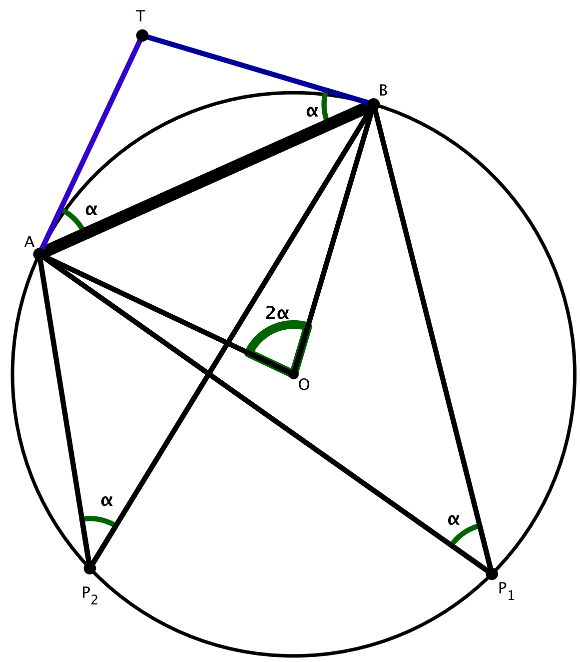


Figure 2: D'un point P quelconque d'un cercle, on voit une corde donnée AB sous un même angle α. Cet angle se retrouve sur les tangentes en A et B, ainsi le triangle ATB est isocèle et les tangentes TA et TB ont mêmes longueurs. De plus la corde est vue du centre O sous un angle double.

1.3 Médianes. Barycentre

La droite joignant un sommet A d'un triangle ABC au milieu A' du côté opposé BC est la **médiane** issue de A du triangle ABC. Les trois médianes du triangle sont concourantes en un point G, appelé **barycentre du triangle**.
G est situé aux deux tiers des médianes, par exemple $GA = -2GA'$ (fig. 4).
G est le centre de masse d'une plaque triangulaire homogène.
G est aussi le centre de masse de trois poids égaux placés aux sommets d'une plaque triangulaire de poids négligeable.
G n'est pas le centre de masse de trois tringles homogènes.

Construction du centre de masse d'une plaque en forme de trapèze:

Soit $ABCD$ le trapèze, I, J les milieux des bases. On reporte DC en BM et AB en ND. Le centre de gravité G est l'intersection des droites IJ et NM (fig. 5).

1.4 Hauteurs. Orthocentre

La droite abaissée d'un sommet A d'un triangle ABC perpendiculairement au côté opposé BC est la **hauteur** issue de A du triangle.
Les trois hauteurs du triangle sont concourantes en un point H, appelé **orthocentre du triangle** (fig. 6).
Les points G, H et O sont alignés sur la droite d'Euler du triangle, de plus $OH = 3OG$.

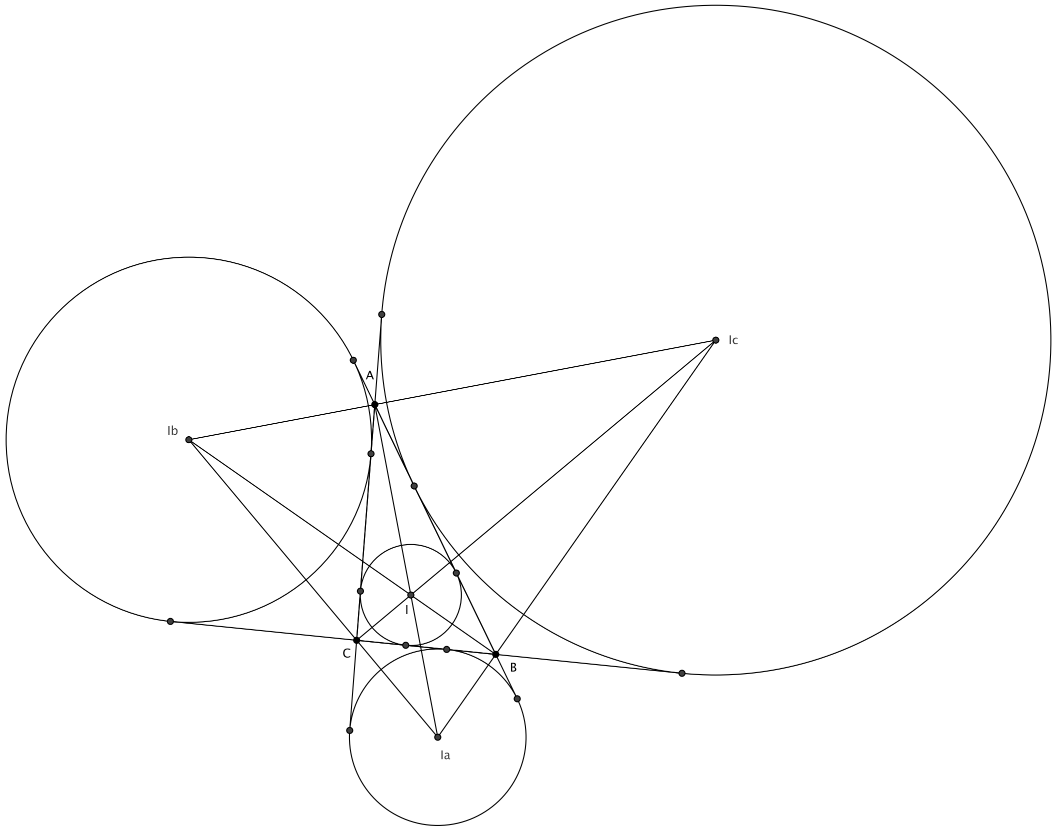


Figure 3: Les bissectrices d'un triangle joignent les centres des cercles tritangents aux côtés.

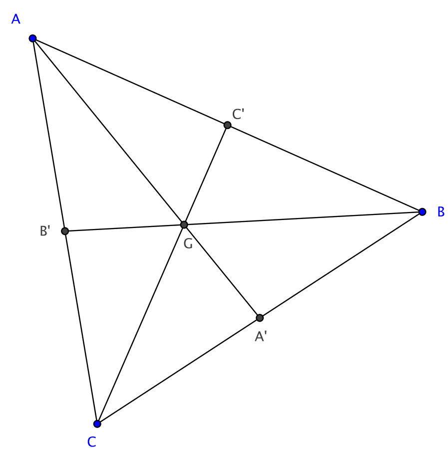


Figure 4: Les médianes d'un triangle passent par les sommets et les mileux des côtés $A'B'C'$.

2 Eléments de géométrie intrinséque dans l'espace

2.1 Généralités

Nous ne ferons pas de distinction entre "perpendiculaire", "normale" et "orthogonale". Ainsi, deux droites perpendiculaires ne sont pas forcément sécantes.

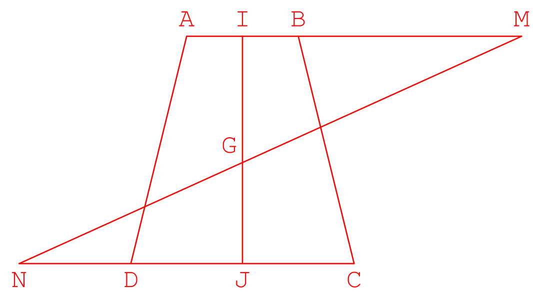


Figure 5: Construction du centre de gravité d'une plaque $ABCD$ en forme de trapèze: IJ est la ligne des milieux et $BM = DC$, $ND = AB$.

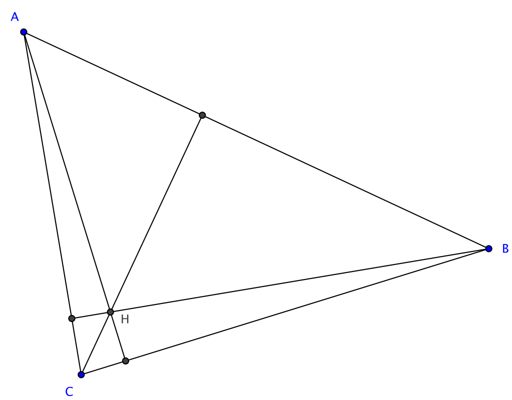


Figure 6: Les hauteurs d'un triangle se coupent en l'orthocentre.

1. Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est **perpendiculaire à toutes les droites** de ce plan. (fig. (7))

2. Une droite est parallèle à un plan si elle est **parallèle à une droite** de ce plan (fig. (8))

3. Deux plans sont perpendiculaires si l'un est parallèle à une perpendiculaire à l'autre. (fig (9))

4. L'angle entre une droite d et un plan α est le complémentaire de l'angle entre d et une normale n_α à α. (fig (10))

5. L'angle entre deux plans α et β est égal à l'angle entre deux perpendiculaires n_α et n_β à ceux-ci.

6. L'angle entre deux droites d et e est l'angle entre deux vecteurs directeurs $\vec{v}_d$ et $\vec{v}_e$ de celles-ci.

7. La projection P' d'un point P sur une droite d est l'intersection du plan π perpendiculaire à d par P et de la droite d.

   La longueur PP' est la distance de P à d. C'est le minimum des longueurs PQ, $Q \in d$.

8. La projection P' d'un point P sur un plan α est l'intersection de la droite p perpendiculaire à α par P et du plan α.

   La longueur PP' est la distance de P à α. C'est le minimum des longueurs PQ, $Q \in \alpha$.

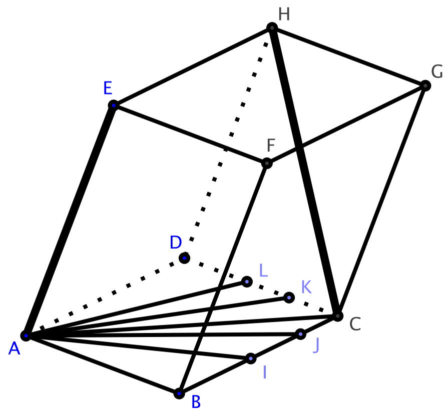


Figure 7: La droite AE est perpendiculaire à **toutes** les droites $AB, AI, AJ, AC, AK, AL, AD$ du plan $ABCD$, elle est donc perpendiculaire au plan $ABCD$. Par contre la droite HC n'est pas perpendiculaire au plan $ABCD$, car elle n'est perpendiculaire qu'à la droite BC.

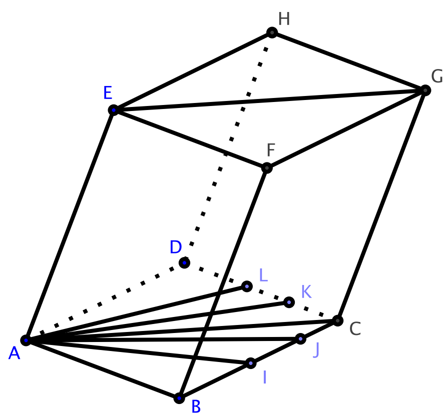


Figure 8: La droite EG est parallèle à **une** droite AC du plan $ABCD$, elle est donc parallèle au plan $ABCD$.

9. La projection d' d'une droite d sur un plan α est l'intersection du plan π perpendiculaire à α par d et du plan α.

   Si d n'est pas parallèle à α, d' passe par l'intersection de d et α.

10. Deux droites gauches d_1 et d_2 admettent une unique perpendiculaire commune, qui coupe d_1 en I_1 et d_2 en I_2.

    La longueur I_1I_2 est la distance de d_1 à d_2. C'est le minimum des longueurs PQ, $P \in d_1$, $Q \in d_2$.

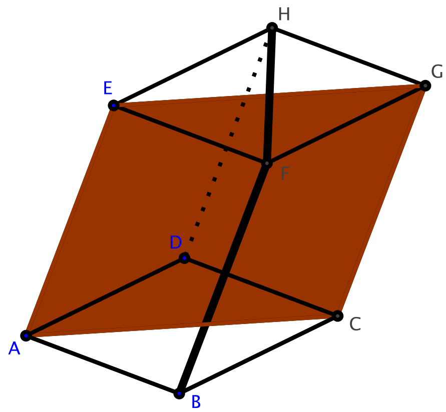


Figure 9: Les plans $ABCD$ et $ACGE$ sont perpendiculaires. La droite FB est perpendiculaire à $ABCD$ et parallèle à $ACGE$. La droite FH est perpendiculaire à $ACGE$ et parallèle à $ABCD$.

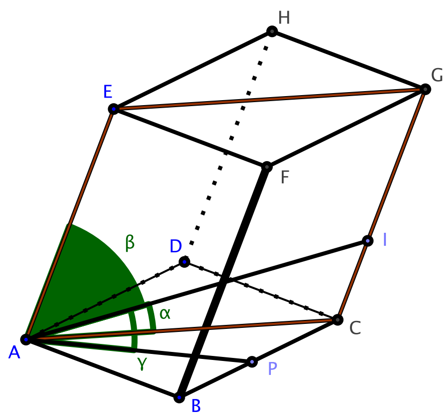


Figure 10: L'angle α entre la droite AI et le plan $ABCD$ est le complémentaire de l'angle β entre AI et la normale AE au plan $ABCD$. C'est aussi l'angle entre AI et sa projection AC sur $ABCD$. C'est le plus petit des angles γ entre AI et les droites AP du plan $ABCD$.

Remarques

- Un plan est déterminé par un point et un vecteur normal, mais

  un plan n'est pas déterminé par un point et un vecteur directeur.

- Une droite est déterminée par un point et un vecteur directeur, mais

  une droite n'est pas déterminée par un point et un vecteur normal.

- Deux vecteurs normaux au même plan sont parallèles entre eux, mais deux vecteurs parallèles au même plan ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.

- Deux vecteurs parallèles à la même droite sont parallèles entre eux; mais deux vecteurs normaux à la même droite ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.

2.2 Plans médiateurs, sphères circonscrites

Le lieu des points équidistants à deux points fixes A et B est le **plan médiateur du segment** AB. Ce plan est perpendiculaire au segment AB en son milieu.
Le lieu des points équidistants à trois points fixes non alignés A, B et C est la droite médiatrice du triangle ABC.
Elle est perpendiculaire au plan ABC au centre du cercle circonscrit à ABC.
Le lieu des points équidistants à quatre points fixes non coplanaires A, B, C et D est le centre M de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.
Ce point M est situé à l'intersection des plans médiateurs des arêtes de $ABCD$.
Le lieu des points voyant un segment AB sous un angle droit est la sphère de Thalès de AB, c'est la sphère de diamètre AB.

2.3 Plans bissecteurs, cercles inscrit et exinscrits

Le lieu des points équidistants à deux plans fixes α et β est formé des deux **plans bissecteurs des plans** α et β.
Ces plans partagent les angles formés par α et β en leurs milieux.
Ils sont perpendiculaires entre eux et passent par la droite commune aux plans α et β.
Le lieu des points équidistants à quatre plans fixes non concourants α, β, γ et δ est formé des huit centres des sphères inscrites et exinscrites au tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$.

2.4 Médianes. Bimédianes. Barycentre

La droite joignant un sommet A d'un tétraèdre au barycentre G_a à la face opposée BCD est la **médiane** issue de A du tétraèdre $ABCD$.
La droite joignant le milieu d'une arête AB au milieu de l'arête opposée CD d'un tétraèdre est une bimédiane du tétraèdre $ABCD$.
Les quatre médianes et les trois bimédianes du tétraèdre sont concourantes en un point G, appelé **barycentre du tétraèdre**.
G est situé aux trois quart des médianes, par exemple $GA = -3GM$, et au milieu des bimédianes.
G est le centre de masse d'un volume tétraèdrique homogène.
G est aussi le centre de masse de quatre poids égaux placés aux sommets d'un tétraèdre.
G n'est pas le centre de masse de six tringles homogènes, ni celui de quatre plaques homogènes.

2.5 Hauteurs

La droite abaissée d'un sommet A d'un tétraèdre perpendiculairement à la face opposée BCD est la **hauteur** issue de A du tétraèdre $ABCD$. Les quatre hauteurs du tétraèdre ne sont, en général, pas concourantes.

3 La droite dans le plan

3.1 Equations cartésiennes

Une équation

$$ax + by + c = 0$$

du premier degré en x, y, représente une droite d. (a, b non nuls simultanément)
Cela signifie qu'un point $(x; y)$ du plan appartient à d si et seulement si ses coordonnées x et y vérifient l'équation ci-dessus.
Une droite donnée possède plusieurs équations cartésiennes, car on peut multiplier l'équation donnée par une constante arbitraire non nulle sans changer la droite.

$$\text{Forme } \textbf{implicite}\text{: } \boldsymbol{ax + by + c = 0} \tag{1}$$

Si a est nul, l'équation ne donne plus de condition sur x, la droite est horizontale.
Si b est nul, l'équation ne donne plus de condition sur y, la droite est verticale.
Si c est nul, la droite passe par l'origine.
En particulier, l'axe Ox est la droite horizontale $y = 0$, l'axe Oy est la droite verticale $x = 0$.

Si la droite n'est pas verticale, $a \neq 0$, on peut isoler y et mettre son équation sous la forme:

$$\text{Forme } \textbf{explicite}\text{: } \boldsymbol{y = mx + h} \tag{2}$$

$$m = -a/b = \tan(\alpha)$$

est la **pente** de la droite et

$$h = -c/b$$

est son **ordonnée à l'origine**.
α est l'angle entre d et l'axe Ox, il est défini à un demi-tour près.
Si une droite tend vers la verticale, m tend vers l'infini et α tend vers l'angle droit.

Les points situés sur les axes s'obtiennent en posant $y = 0$ ou $x = 0$ dans (1) ou (2).

L'équation d'une droite de pente m passant par le point $P_0(x_0; y_0)$ peut s'écrire:

$$\text{Forme } \textbf{point-pente}\text{: } \boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)} \tag{3}$$

L'équation cartésienne d'une droite d ni verticale ni horizontale passant par $P_0(x_0; y_0)$ et parallèle au vecteur $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ peut s'écrire:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} \tag{4}$$

Celle d'une droite horizontale passant par $P_0(x_0; y_0)$ est:[2]

$$y = y_0$$

Celle d'une droite verticale passant par $P_0(x_0; y_0)$ est:

$$x = x_0$$

[2]"pas de x" $\Longleftrightarrow$ "parallèle à Ox", "pas de y" $\Longleftrightarrow$ "parallèle à Oy".

3.2 Vecteurs. Perpendicularité. Parallélisme. Intersections

Soit

$$d : ax + by + c = 0$$

une droite du plan.
Le vecteur

$$\vec{v} = -b\vec{i} + a\vec{j}$$

a même pente $m = -a/b$ que d, il est parallèle à d, c'est un **vecteur directeur** de d.

Une droite n'a qu'une seule direction, mais une infinité de vecteurs directeurs (tous colinéaires).

Le vecteur

$$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

est perpendiculaire à la droite d, car le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{v}$ est nul, c'est un **vecteur normal** de d.

La pente de $\vec{n}$ multipliée par celle de $\vec{v}$ donne -1. On a donc le critère:

Critère de perpendicularité de deux droites non verticales:

Deux droites sont perpendiculaires si le produit de leurs pentes vaut -1.

Soient deux droites

$$ax + by + c = 0 \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

Critères de parallélisme de deux droites:

- Elles ont mêmes pentes
- leurs vecteurs directeurs sont multiples l'un de l'autre
- leurs vecteurs normaux sont multiples l'un de l'autre
- leurs coefficients sont proportionnels:
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Critère d'identité de deux droites:

Les droites sont confondues si

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

L'**intersection de deux droites** donne lieu à trois cas possibles:

- $$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$
  les droites sont sécantes, elles ont un point commun, dont les coordonnées s'obtiennent en résolvant le système des deux équations cartésiennes qui admet alors une solution unique.
- $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$
  les droites sont parallèles, elles n'ont aucun point commun.

  Le système est impossible.

▹
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

les droites sont confondues, elles ont une infinité de points communs.

Le système est indéterminé.

Signalons encore le critère:
Trois droites passent par le même point si le déterminant suivant est nul:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

En effet, un système de trois équations à deux inconnues admet des solutions si l'une des équations est combinaison des autres.

L'angle θ entre les deux droites non verticales de pentes $m = \tan(\alpha)$ et $m' = \tan(\alpha')$ est déterminé au signe et au demi-tour près: $\theta = \alpha - \alpha' \equiv \alpha' - \alpha \equiv \alpha' - \alpha + \pm\pi$.

La tangente d'une différence donne la formule

$$\tan(\theta) = \frac{m - m'}{1 + mm'} \tag{5}$$

3.3 Translation des axes de coordonnées

Soient deux systèmes d'axes Oxy et $O'x'y'$ de coordonnées, $Ox \parallel O'x'$ et $Oy \parallel O'y'$.
On passe d'un système à l'autre par une translation $\overrightarrow{OO'}$.
Soit un point P admettant les coordonnées $(x; y)$ dans l'ancien système Oxy et les coordonnées $(x'; y')$ dans le nouveau système $O'x'y'$.
Soit $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ et $\vec{x}' = \overrightarrow{O'P}$.
Les formules de passage sont données par l'équation vectorielle

$$\vec{x} = \vec{x}' + \overrightarrow{OO'}$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Finalement, sous forme développée:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x' + x_0 \\ y & = & y' + y_0 \end{array} \right\} \tag{7}$$

où $(x_0; y_0)$ sont les anciennes coordonnées de la nouvelle origine O'.

Exemples:

- Un point P d'anciennes coordonnées

  $$(x; y)$$

  aura les nouvelles coordonnées

  $$(x - x_0; y - y_0)$$

- Une droite d d'ancienne équation
$$ax + by + c = 0$$
aura une nouvelle équation obtenue en substituant $x = x' + x_0$ et $y = y' + y_0$, ainsi:
$$a(x' + x_0) + b(y' + y_0) + c = 0$$
- Un cercle d'ancienne équation
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
aura pour nouvelle équation
$$x'^2 + y'^2 = r^2$$
- L'ancienne équation
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$
d'une ellipse deviendra
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$
- Une hyperbole équilatère d'ancienne équation
$$(x' - x_0)^2 - (y' - y_0)^2 = a^2$$
aura pour nouvelle équation
$$x'^2 - y'^2 = a^2$$

3.4 Rotation des axes de coordonnées

Soient deux systèmes d'axes Oxy et $Ox'y'$, $\angle(Ox, Ox') = \angle(Oy, Oy') = \theta$.

On passe donc d'un système à l'autre par une rotation d'angle θ.

Soit un point P admettant des coordonnées $(x; y)$ dans l'ancien système Oxy et des coordonnées $(x'; y')$ dans le nouveau système $Ox'y'$.

Les formules de passage sont données par

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x' & = & x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ y' & = & -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{array} \right\} \tag{8}$$

Souvent, les formules de passage inverse sont plus utiles.
Elles sont obtenues par une rotation de $-\theta$.
Elles se déduisent donc des formules ci-dessus en remplaçant θ par $-\theta$, ce qui change le signe des sinus.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta) \\ y & = & x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta) \end{array} \right\} \tag{9}$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{10}$$

Remarquons que les colonnes de la matrice de rotation sont données par les composantes (dans l'ancien système) des nouveaux vecteurs de base $\vec{i}', \vec{j}'$.

Exemples:

- ▹ Un point P d'anciennes coordonnées
$$(x; y)$$
aura les nouvelles coordonnées
$$(x\cos(\theta) + y\sin(\theta); -x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

- ▹ Une ellipse d'ancienne équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
aura pour nouvelle équation
$$\frac{(x'\cos(\theta) - y'\sin(\theta))^2}{a^2} + \frac{(x'\sin(\theta) + y'\cos(\theta))^2}{b^2} = 1$$
En simplifiant, on trouve
$$x'^2\left(\frac{\cos^2(\theta)}{a^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{b^2}\right) + y'^2\left(\frac{\sin^2(\theta)}{a^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{b^2}\right) + x'y'\,(\sin(2\theta)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 1$$

3.5 Distance d'un point à une droite

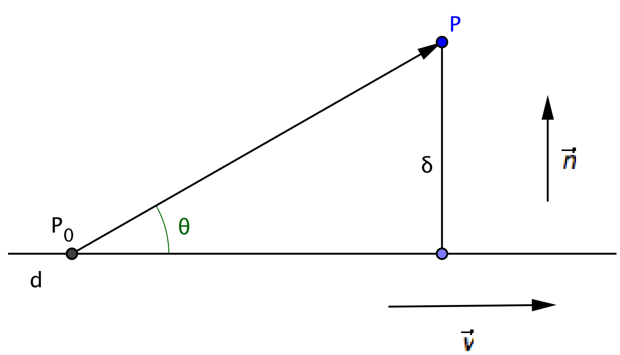


Figure 11: Distance δ d'un point P à une droite d.

Soit d une droite déterminée par un point $P_0 \in d$ et un vecteur $\vec{v} \mathbin{/\!/} d$ ou un vecteur $\vec{n} \perp d$.
Soit P un point quelconque du plan.

La distance $\delta(P, d)$ du point P à la droite d est donnée par :

$$\delta(P, d) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \tag{11}$$

En effet,

$$||\overrightarrow{P_0P} \wedge \vec{v}|| = v \ P_0P \ \sin(\theta) = v \ \delta$$

et

$$|\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}| = |n \ P_0P \ \cos(90 - \theta)| = n \ \delta$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{P_0P}$ et $\vec{v}$. Voir fig (11).

En introduisant des coordonnées, $P_0(x_0; y_0)$, $P(x; y)$ et $d : ax + by + c = 0$, on obtient:

$$\delta(P, d) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{12}$$

Comparer avec les formules donnant la distance d'un point à un plan, formule (29) et la distance d'un point à une droite, dans l'espace, formule (35).

Exemple
La distance du point $P(1; 2)$ à la droite d: $3x + 4y - 7 = 0$ vaut

$$\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 7}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$$

3.6 Bissectrices

Deux droites sécantes d_1 et d_2 admettent deux bissectrices b_1 et b_2 perpendiculaires.
Les bissectrices sont le lieu des points équidistants des deux droites.
Un point $P(x; y)$ est sur une des bissectrices s'il vérifie $\delta(P, d_1) = \pm\delta(P, d_2)$ donc les équations des deux bissectrices sont:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \tag{13}$$

La formule n'indique pas quelle est la bissectrice de l'angle aigu et quelle est celle de l'angle obtu. Le calcul de leurs pentes et un petit dessin permettent en général de choisir.

3.7 Equations paramétriques

Le principe est d'associer à chaque valeur d'un paramètre réel, disons α, $\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$, un point du plan $P(x(\alpha); y(\alpha))$. Pour cela il faut donner les coordonnées, x et y, de P en fonction de α:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x(\alpha) \\ y & = & y(\alpha) \end{array} \right\}$$

ou sous forme vectorielle

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha)$$

Si $x(\alpha)$ et $y(\alpha)$ sont des polynômes du premier degré en α, alors lorsque α varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point P décrit une droite.
Preuve:
Soit $x = x_0 + v_1\alpha$ et $y = y_0 + v_2\alpha$. En éliminant α, on trouve une relation du premier degré en x, y#.

A chaque valeur de α correspond un point de la droite d, et à chaque point de la droite d correspond une valeur de α.
En particulier $\alpha = 0$ donne le point $P_0(x_0; y_0)$ de d.
En limitant les valeurs de α à un intervalle $\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$, le point P décrit alors un segment.

Forme vectorielle:
Soient $P_0(x_0; y_0)$ un point fixe et $P(x; y)$ un point variable de la droite d.
Notons $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ et $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ leurs vecteurs position.
On a

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} = \vec{r}_0 + k\,\vec{v}_d$$

Les équations paramétriques (de paramètre k) deviennent

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + k\,\vec{v}_d \tag{14}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + k\,v_1 \\ y & = & y_0 + k\,v_2 \end{array} \right\} \tag{15}$$

Ce sont les équations paramétriques d'une droite d passant par $P_0(x_0; y_0)$ et parallèle à $\vec{v}_d$.

Les équations ne sont pas uniques, on peut modifier le point $P_0(x_0; y_0)$ ou le vecteur $\vec{v}_d$.

Pour retrouver l'équation cartésienne, il faut éliminer le paramètre k:
On tire k de chaque équation et on égale, on trouve alors

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

Cela n'est pas possible si l'une des composantes de $\vec{v}_d$ est nulle.
Si $v_1 = 0$ la droite est verticale et son équation cartésienne est $x = x_0$.
Si $v_2 = 0$ la droite est horizontale et son équation cartésienne est $y = y_0$.

Attention! Deux droites ont chacune leur paramètre, il faut donc employer une lettre différente.

Une façon élégante (valable aussi dans l'espace) de paramétrer un segment AB est donnée par

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP} = (1 - k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}$$

3.8 Inéquations du premier degré. Demi-plans. Programmation linéaire

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
Cette droite divise le plan en deux demi-plans d_+ et d_-, dont les "équations" sont données par d_+ : $ax + by + c \geq 0$ et d_- : $ax + by + c \leq 0$.
Un sytème d'inéquations du premier degré représente les points communs à plusieurs demi-plans, donc une surface polygonale, éventuellement vide ou réduite à un point ou encore infinie, par exemple une bande verticale.
Un problème caractérisé par plusieurs inéquations linéaires à deux variables appartient au domaine de la programmation linéaire. Parmi les solutions, on cherche en général à maximiser ou à minimiser une

fonction linéaire $f(x, y)$, appelée fonction objectif. Les inéquations du problème sont les contraintes.

Exemple:
Un industriel fabrique des accessoires de deux modèles A et B. La journée de travail dure 8 heures. Il faut 1 heure pour fabriquer une caisse de A et 2 heures pour fabriquer une caisse de B. Les matières premières dont il dispose permettent de fabriquer au plus 6 caisses de l'un ou l'autre modèle. Les ventes journalières ne peuvent excéder 5 caisses du modèle A ou 3 caisses du modèle B. Le bénéfice est de 200.- par caisse A et de 300.- par caisse B. Quel doit être le programme de fabrication pour maximiser le bénéfice?

Soit x le nombre de caisses A et y le nombre de caisses B. Les contraintes sont

$x \geq 0, y \geq 0$	:	La production ne peut pas être négative.
$x \leq 5$ et $y \leq 3$	:	La production n'excède pas les possibilités des ventes.
$x + 2y \leq 8$	:	La durée de fabrication ne dépasse pas 8h.
$x + y \leq 6$	:	Les matières premières limitent la fabrication à 6 caisses.
$F = 200x + 300y$	:	Il faut maximiser le bénéfice F.

On représente les droites $x = 0, y = 0, x = 5, y = 3, x + 2y = 8, x + y = 6$ dans un système d'axes orthogonal et on introduit la droite $d : F = 200x + 300y$.
Maximiser F équivaut à maximiser l'ordonnée à l'origine de la droite d.
On déplace alors d parallèlement à la pente -200/300 = -2/3 , le maximum est atteint si d passe par le point $R(4; 2)$, ainsi $x = 4, y = 2$ et $F = 1400$.

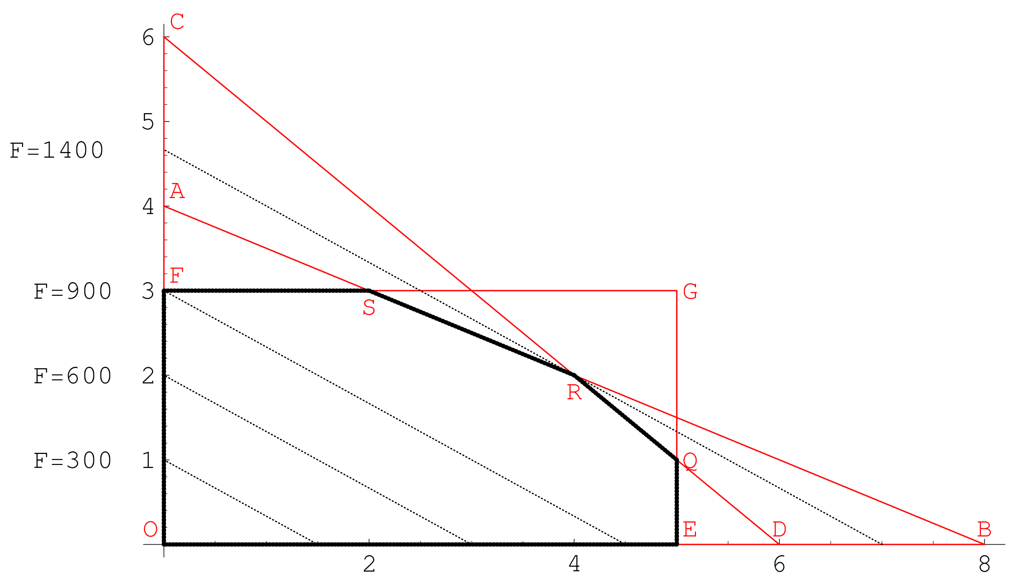


Figure 12: Le point R donne le bénéfice maximal.

4 Le cercle dans le plan

4.1 Equation cartésienne

Un cercle est déterminé par son centre et son rayon, ou par son centre et un point, ou par trois points, etc... Nous examinerons le cas d'un cercle donné par son centre et son rayon, les autres cas seront traités en exercices.
Soit $C(a;b)$ le centre et r le rayon du cercle.
Un point $P(x;y)$ du plan est situé sur le cercle si la distance PC est égale à r; il est situé à l'intérieur du cercle si $PC < r$ et il est situé à l'extérieur du cercle si $PC > r$.
Equation cartésienne du cercle de centre $C(a;b)$ de rayon r:

$$\text{Forme } \textbf{normale}: \boldsymbol{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2} \tag{16}$$

Equation cartésienne du disque de centre $C(a;b)$ de rayon r:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$$

En développant l'équation (16), on trouve l'équation cartésienne du cercle sous forme développée $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$: ou encore:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = constant \tag{17}$$

La forme normale (16) permet de trouver immédiatement le centre et le rayon du cercle.
Alors que l'équation (17) nécessite de compléter les carrés.

4.2 Passage à la forme normale

L'équation développée d'un cercle est un cas particulier de l'équation générale du second degré à deux variables qui se présente ainsi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{18}$$

Cette équation représente toujours une conique, celle-ci est un cercle si $B = 0$ et $A = C$.[3]

Pour retrouver la forme normale, il faut compléter les carrés.
Les exemples ci-dessous illustrent la méthode.

Exemple 1

$$x^2 + y^2 + x + 4y = 1$$

$B = 0$ et $A = C$, c'est bien un cercle, pour le mettre sous la forme standard, il faut former des carrés parfaits:
Ajoutons 1/4 et 4 à chaque membre pour compléter les carrés:

$$x^2 + x + 1/4 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 1/4 + 4$$

Formons les carrés:

$$(x + 1/2)^2 + (y + 2)^2 = 21/4$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $C(-1/2;-2)$ et de rayon $r = \sqrt{21/4}$.

[3]Ce cercle peut être réél ou imaginaire.

Exemple 2

$$x^2 + y^2 + x + 4y = -1$$

$B = 0$ et $A = C$, c'est bien un cercle.
Formons les carrés:

$$(x + 1/2)^2 + (y + 2)^2 = 13/4$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $C(-1/2; -2)$ et de rayon $r = \sqrt{13/4}$.

Exemple 3

$$x^2 + y^2 + x + 4y = -5$$

$B = 0$ et $A = C$, c'est bien un cercle.
Formons les carrés:

$$(x + 1/2)^2 + (y + 2)^2 = -3/4$$

C'est l'équation d'un cercle imaginaire. Aucun point réel ne vérifie l'équation donnée. La figure est vide!

Exemple 4

$$5x^2 + 5y^2 + 5x + 20y = -5$$

$B = 0$ et $A = C$, c'est bien un cercle.
Il faut d'abord diviser par 5 avant de former les carrés, sinon on n'obtient pas l'équation sous la forme normale:

$$x^2 + y^2 + x + 4y = -1$$

On retrouve le cercle de l'exemple (2).

Exemple 5

$$x^2 - y^2 + 5x + 20y = -5$$

$B = 0$ mais $A \neq C$, ce n'est pas un cercle, c'est une hyperbole.

4.3 Cas particuliers

Cercle **centré à l'origine** de rayon r

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2} \tag{19}$$

Cercle **passant par l'origine** de centre $C(a; b)$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0 \tag{20}$$

Le terme constant est nul.
Une translation des axes au centre du cercle: $x' = x - a, y' = y - b$ permet de mettre tout cercle sous la forme (19).

Remarque
Un cercle est déterminé par trois paramètres, a, b et r, il faut donc trois conditions pour le déterminer.
Par exemple:
1) Les coordonnées du centre et le rayon.
2) Une droite contenant le centre, la valeur du rayon et un point du cercle.

4.4 Equations paramétriques

Une façon particulièrement simple de paramétrer un cercle est de positionner un point variable P par son angle θ avec un rayon horizontal.
Vectoriellement:

$$\vec{r}(\theta) = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$$

Matriciellement:

$$\begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \tag{21}$$

ou sous forme développée

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(\theta) & = & a + r\cos(\theta) \\ y(\theta) & = & b + r\sin(\theta) \end{array} \right\} \tag{22}$$

Les équations paramétriques ne sont pas uniques, on peut modifier le paramètre, par exemple 2θ au lieu de θ!
On peut passer à l'équation cartésienne en éliminant le paramètre:

$$\frac{x-a}{r} = \cos(\theta)\ , \ \frac{y-b}{r} = \sin(\theta)$$

en élevant au carré et en additionnant:

$$\frac{(x-a)^2}{r^2} + \frac{(y-b)^2}{r^2} = 1$$

on retrouve l'équation standard du cercle.

4.5 Droites et cercles. Tangentes

Une droite peut être sécante, tangente ou extérieure à un cercle, selon qu'elle a deux points, un point ou aucun point commun avec le cercle.
On peut donner un critère algébrique très simple pour distinguer les trois cas, il suffit de calculer la distance d de la droite au centre du cercle:

$$\begin{array}{cccl} d & < & r & \text{sécante} \\ d & = & r & \text{tangente} \\ d & > & r & \text{extérieure} \end{array}$$

Les points d'intersection s'obtiennent en résolvant le système formé des équations du cercle et de la droite, qui admet 2, 1 ou 0 solutions.

La tangente a la propriété géométrique suivante:

La tangente en un point T d'un cercle est perpendiculaire au rayon *CT*

Cette propriété permet de trouver l'équation de la tangente en un point du cercle:

Equation de la tangente en $T(x_0; y_0)$ au cercle de centre $C(a; b)$ de rayon r:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2 \tag{23}$$

Equation qu'on peut établir aussi par la dérivée.

4.6 Polaires. Tangentes issues d'un point

Si $P(x_0; y_0)$ n'est pas sur le cercle, l'équation (23) représente une droite appelée **polaire** de P.
Elle est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{CP}$.
Supposons que le point P soit extérieur au cercle. Il existe alors deux tangentes au cercle issues de P, elles touchent le cercle en deux points T_1 et T_2. On peut vérifier que la polaire de P est la droite T_1T_2.
Si P est sur le cercle, on retrouve évidemment la tangente en P.
La polaire s'utilise pour trouver les tangentes à un cercle issues d'un point P donné.

4.7 Intersection de deux cercles. Axe radical

Deux cercles sont positionnés de 6 manières différentes.
Notons C_1 et C_2 leurs centres, $r_1 \geq r_2$ leurs rayons et $d = C_1C_2$, la distance des centres.

Positions respectives de deux cercles:

$$\begin{array}{ccccll}
 & & d & = & 0 & \text{concentriques} \\
0 & < & d & < & r_2 - r_1 & \text{intérieurs} \\
 & & d & = & r_2 - r_1 & \text{tangents intérieurement} \\
r_2 - r_1 & < & d & < & r_2 + r_1 & \text{sécants} \\
 & & d & = & r_2 + r_1 & \text{tangents extérieurement} \\
 & & d & > & r_2 + r_1 & \text{extérieurs}
\end{array}$$

Les points communs à deux cercles vérifient le système formé de leurs équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0 \end{array} \right\}$$

En général, on ne résout pas un système en égalant les deux membres de gauche, mais ici cela donne une équation du premier degré.

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2$$

Cette équation est celle de la droite qui joint les points d'intersection des deux cercles, c'est l'**axe radical des deux cercles**.
Les tangentes aux deux cercles issues d'un point de cet axe ont mêmes longueurs (fig (13).

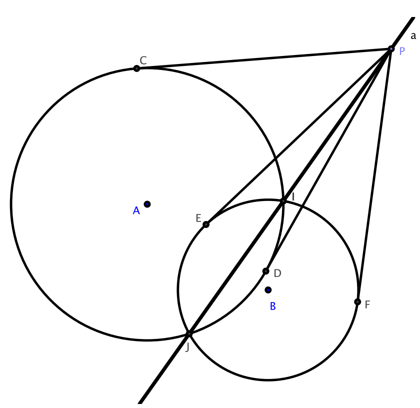


Figure 13: Un point P sur l'axe radical a des deux cercles (A) et (B) a des tangentes PC, PD, PE, PF de mêmes longueurs.

5 Le plan dans l'espace

5.1 Equation cartésienne

Nous supposerons qu'un repère orthornormé $Oxyz$ est donné.

Nous avons les **axes** Ox , Oy et Oz et les **plans de référence** Oxy, Oyz et Oxz.

Un **plan** $\boldsymbol{\pi}$ est en général donné par un **vecteur normal**

$$\vec{\boldsymbol{n}}_\pi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

qui fixe sa **direction** et un **point**

$$\boldsymbol{P_0(x_0; y_0; z_0) \in \pi}$$

qui fixe sa **position**.

Les points $P(x; y; z)$ de π sont alors caractérisés par

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

Ce qui donne l'équation cartésienne du plan sous la forme **point-vecteur normal**:

$$\boldsymbol{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0} \tag{24}$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme **implicite**

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0} \tag{25}$$

Ou **explicite**, si $c \neq 0$

$$\boldsymbol{z = mx + ny + h} \tag{26}$$

L'équation (24) met en évidence un point P_0 et un vecteur normal $\vec{n}_\pi$ du plan π.

Si a, b et c ne sont pas tous nuls, toute équation du premier degré à trois variables (25) représente un plan.

Dans (26), z est vu comme une fonction f de deux variables x, y:

$$z = f(x, y) = mx + ny + h$$

du premier degré à deux variables x, y.

Si on pose $y = 0$ ou $x = 0$, on obtient $z = mx + h$ ou $z = ny + h$.
On voit ainsi que m et n représente les pentes du plan π dans les directions Ox et Oy.

Ce sont les valeurs des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction $f(x, y)$.

Deux équations cartésiennes d'un même plan sont proportionnelles.

Cas particuliers:[4]

- ▹ $a = 0$: $by + cz + d = 0$, plan perpendiculaire à Oyz, parallèle à Ox.
- ▹ $b = 0$: $ax + cz + d = 0$, plan perpendiculaire à Oxz, parallèle à Oy.
- ▹ $c = 0$: $ax + by + d = 0$, plan perpendiculaire à Oxy, parallèle à Oz, **plan vertical**.
- ▹ $d = 0$: $ax + by + cz = 0$, **plan par l'origine**.
- ▹ $a = b = 0$: $z = constant$, plan perpendiculaire à Oz, parallèle à Oxy, **plan horizontal**.
- ▹ $a = c = 0$: $y = constant$, plan perpendiculaire à Oy, parallèle à Oxz.
- ▹ $b = c = 0$: $x = constant$, plan perpendiculaire à Ox, parallèle à Oyz.

Les plans de référence ont pour équations:

Oxy : plan horizontal $z = 0$.

Oyz : plan vertical $x = 0$.

Ozx : $y = 0$.

Les points situés sur les axes s'obtiennent en posant $x = y = 0$, $x = z = 0$ ou $y = z = 0$.

5.2 Equations paramétriques du plan

Le principe est d'associer à chaque couple de nombres réels, disons (s, t), un point de l'espace $P(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$.
Pour cela il faut donner les coordonnées, x, y et z, de P en fonction de s et t:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x(s,t) \\ y & = & y(s,t) \\ z & = & z(s,t) \end{array}\right\}$$

ou sous forme vectorielle

$$\vec{r} = \vec{r}\,(s,t)$$

Si $x(s, t)$, $y(s, t)$ et $z(s, t)$ sont des polynômes du premier degré en s et t, alors lorsque s et t varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point P décrit un plan π.
A chaque valeur de (s, t) correspond un point du plan π, et à chaque point du plan π correspond une valeur de (s, t).
En particulier $s = t = 0$ donne le point $P_0(x_0; y_0; z_0)$ de π.
En limitant les valeurs de s, t à des intervalles, le point P décrit alors un parallélogramme.

Forme vectorielle:
Soient $P_0(x_0; y_0; z_0)$ un point fixe et $P(x; y; z)$ un point variable du plan π.
Notons $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ et $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}_0$ leurs vecteurs position.
On a

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} = \vec{r}_0 + s\,\vec{v} + t\,\vec{w}$$

[4] "pas de x" $\Longleftrightarrow$ "parallèle à Ox", "pas de y" $\Longleftrightarrow$ "parallèle à Oy", "pas de z" $\Longleftrightarrow$ "parallèle à Oz".

où $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux **vecteurs parallèles** à π, mais non parallèles entre eux.

Les équations paramétriques (de paramètres s, t) deviennent

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\,\vec{v} + t\,\vec{w} \tag{27}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + s\,v_1 + t\,w_1 \\ y & = & y_0 + s\,v_2 + t\,w_2 \\ z & = & z_0 + s\,v_3 + t\,w_3 \end{array} \right\} \tag{28}$$

Les équations ne sont pas uniques, on peut modifier les paramètres, le point P_0 ou les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Pour passer des équations paramétriques à l'équation cartésienne, il faut éliminer les paramètres s et t.

Il est plus rapide d'obtenir l'équation cartésienne en calculant le vecteur $\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w}$, qui est normal au plan.

Cas particuliers:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + s\,v_1 + t\,w_1 \\ y & = & y_0 + s\,v_2 + t\,w_2 \\ z & = & z_0 \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & s \\ y & = & t \\ z & = & z_0 \end{array} \right\}$$

sont des plans horizontaux.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + s\,v_1 \\ y & = & y_0 + s\,v_2 \\ z & = & t \end{array} \right\}$$

est un plan vertical, parallèle au vecteur $\vec{k}$ et au vecteur horizontal $\vec{v}$.

5.3 Perpendicularité. Parallélisme. Intersections

5.3.1 Position de deux plans

Soient deux plans

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

et

$$\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

de vecteurs normaux

$$\vec{n}_\alpha \qquad \vec{n}_{\alpha'}$$

Ces deux plans sont:

1. **sécants**:

   $$\alpha \cap \alpha' = i$$

   i est la droite d'intersection, elle est parallèle à

   $$\vec{v}_i = \vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_{\alpha'}$$

   Le système des équations de α et β (2 équations à 3 inconnues) est indéterminé.

2. **parallèles**:
$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_{\alpha'} \Longleftrightarrow a/a' = b/b' = c/c'$$

   Le système est impossible.

3. **confondus**:
$$\alpha = \alpha' \Leftrightarrow a/a' = b/b' = c/c' = d/d'$$

   Le système est indéterminé.

4. **perpendiculaires**:
$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_{\alpha'} = 0$$

Remarquons que s'ils sont parallèles ou confondus, on a

$$\vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_{\alpha'} = \vec{0}$$

5.3.2 Position de trois plans

Soient trois plans

$$\alpha_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$\alpha_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

et

$$\alpha_3 : a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

de vecteurs normaux

$$\vec{n}_{\alpha_1} \qquad \vec{n}_{\alpha_2} \qquad \vec{n}_{\alpha_3}$$

Ces trois plans sont:

1. **sécants en un point** commun I.

   Le système des équations de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (3 équations à 3 inconnues) admet une unique solution, les coordonnées de I.

2. **en triangle**: deux des plans se coupent selon une droite parallèle au troisième. Le système est impossible.

3. **sécants selon une droite** (en feuillet). Le système est indéterminé.

4. **parallèles**: Le système est impossible.

Remarquons que si les trois plans sont en triangle ou en feuillet, le produit mixte est nul:

$$(\vec{n}_{\alpha_1} \wedge \vec{n}_{\alpha_2}) \cdot \vec{n}_{\alpha_3} = 0$$

5.4 Distance d'un point à un plan

Soit un plan π donné par un vecteur normal $\vec{n_\pi} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ et un point $P_0(x_0; y_0; z_0) \in \pi$.
Soit $P(x; y; z)$ un point quelconque de l'espace.

Pour trouver la distance $\delta(P, \pi)$ du point P au plan π,
calculons le produit scalaire

$$|\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n_\pi}| = \|\overrightarrow{P_0P}\| \ \cdot \ |\cos \angle(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n_\pi})| \ \cdot \ \|\vec{n_\pi}\| = |\delta(P, \pi)| \ \cdot \ \|\vec{n_\pi}\|$$

Ainsi:

$$\delta(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n_\pi}|}{\|\vec{n_\pi}\|} \tag{29}$$

En introduisant des coordonnées, on obtient, pour le plan

$$ax + by + cz + d = 0$$

la formule:

$$\delta(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{30}$$

6 La droite dans l'espace

6.1 Equations paramétriques

Une **droite d** est déterminée par un point

$$\boldsymbol{P_0(x_0; y_0; z_0)}$$

et un vecteur

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{d}} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

parallèle à d (vecteur directeur).

Les points $P(x; y; z)$ de d sont caractérisés par

$$\overrightarrow{P_0P} = k\,\vec{v}_d$$

On obtient ainsi les **équations paramétriques de la droite**, sous forme vectorielle:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_0 + k\,\vec{v}_d \tag{31}$$

matricielle:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{32}$$

ou développée:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{x_0 + kv_1} \\ \boldsymbol{y} & = & \boldsymbol{y_0 + kv_2} \\ \boldsymbol{z} & = & \boldsymbol{z_0 + kv_3} \end{array} \right\} \tag{33}$$

Les équations paramétriques **ne sont pas uniques**, on peut modifier le paramètre k, le vecteur parallèle ou encore le point donné.

Attention! Deux droites auront chacune leur paramètre, il faut donc employer une lettre différente.

6.2 Equations cartésiennes

En éliminant le paramètre, on obtient **les équations cartésiennes de la droite**:

$$\boldsymbol{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}} \tag{34}$$

Ces équations ne sont valables que si **toutes les composantes de $\vec{v}_d$ ne sont pas nulles**.

Remarquons qu'une droite nécessite **deux** équations cartésiennes, alors qu'une seule donne un plan.

Cas particuliers

- ▹ $v_1 = 0$: droite parallèle à Oyz:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x_0 \\ \frac{y-y_0}{v_2} & = & \frac{z-z_0}{v_3} \end{array} \right\}$$

- ▹ $v_2 = 0$: droite parallèle à Oxz:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & y_0 \\ \frac{x-x_0}{v_1} & = & \frac{z-z_0}{v_3} \end{array} \right\}$$

- ▹ $v_3 = 0$: droite parallèle à Oxy (**droite horizontale**):

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z & = & z_0 \\ \frac{x-x_0}{v_1} & = & \frac{y-y_0}{v_2} \end{array} \right\}$$

- ▹ $v_1 = v_2 = 0$: droite parallèle à Oz (**droite verticale**):

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x_0 \\ y & = & y_0 \end{array} \right\}$$

- ▹ $v_3 = v_1 = 0$: droite parallèle à Oy:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x_0 \\ z & = & z_0 \end{array} \right\}$$

- ▹ $v_2 = v_3 = 0$: droite parallèle à Ox:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & y_0 \\ z & = & z_0 \end{array} \right\}$$

- ▹ $x_0 = y_0 = z_0 = 0$: droite par l'origine O:

$$\frac{x}{v_1} = \frac{y}{v_2} = \frac{z}{v_3}$$

6.3 Plans projetants

Les équations cartésiennes (34) d'une droite d sont formées des trois équations cartésiennes des **plans projetants** d sur les plans de référence.

Ce sont des plans passant par d et perpendiculaires aux plans de référence, voir la figure (14).

Leurs équations sont

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}$$
$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

et

$$\frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

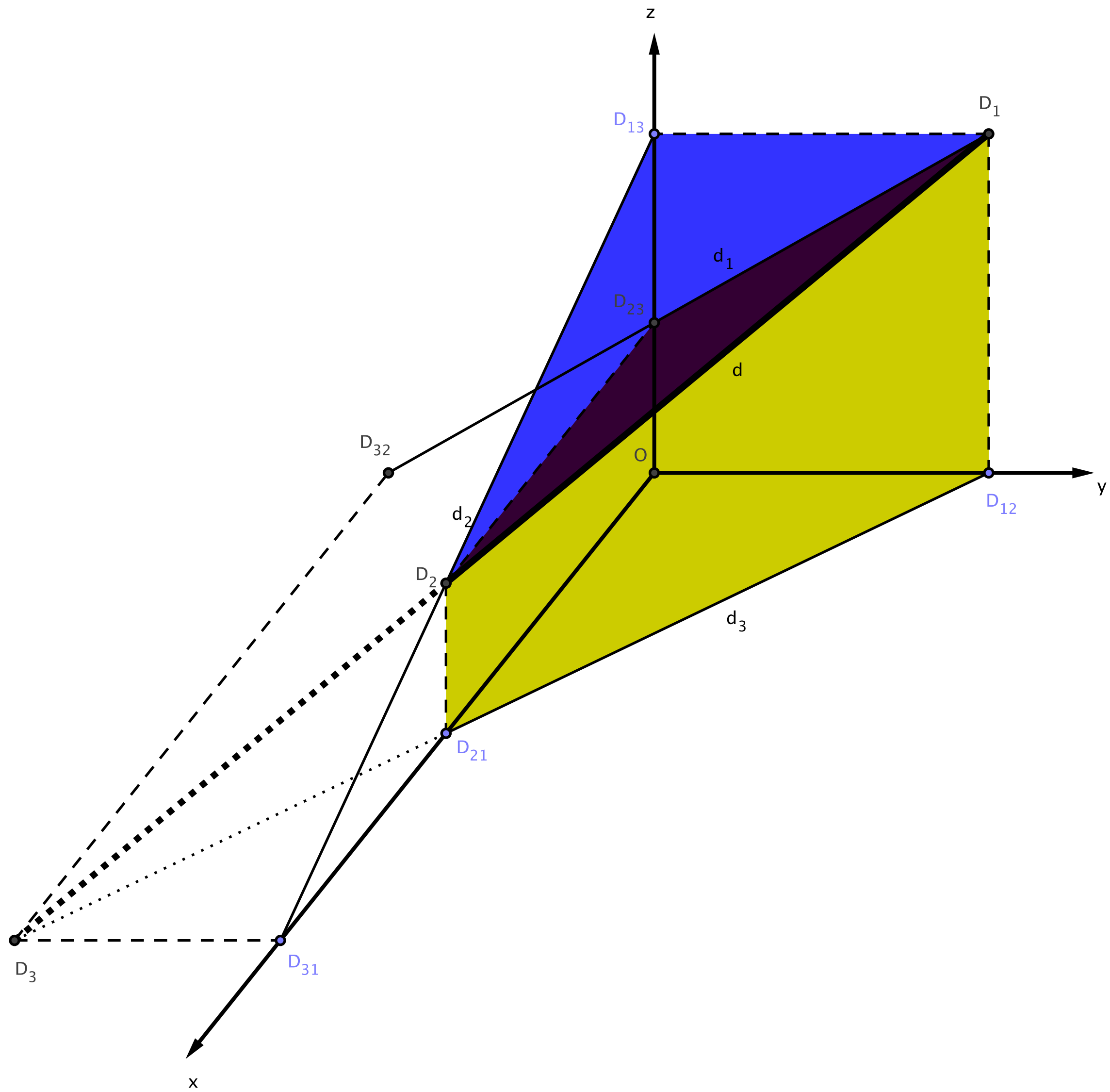


Figure 14: La droite d coupe les plans de référence en D_1, D_2, D_3, elle se projette sur le plan Oxy en d_3 qui coupe les axes en D_{21} et D_{12}. Le plan formé des droites d et d_3 est le plan projectant d sur Oxy. De même pour les deux autres projections.

6.4 Position d'une droite et d'un plan

Trois cas sont à distinguer:
La droite est

1. sécante au plan. Elle le coupe en un point.
2. parallèle au plan.
3. dans le plan.

6.5 Position de deux droites

Quatre cas sont à distinguer:

Les droites sont:

1. sécantes, elles se coupent en un point.
2. parallèles.
3. confondues.
4. gauches, elles ne se coupent pas et ne sont pas parallèles.

6.6 Distance d'un point à une droite

La formule (11) reste valable dans l'espace.
Soit d une droite déterminée par un point $P_0(x_0; y_0; z_0) \in d$ et un vecteur directeur $\vec{v}_d \parallel d$ et soit P un point quelconque de l'espace.

La distance $\delta(P, d)$ du point P à la droite d est donnée par :

$$\delta(P, d) = \frac{\|\overrightarrow{P_0P} \wedge \vec{v}_d\|}{\|\vec{v}_d\|} \tag{35}$$

6.7 Distance de deux droites

Deux droites gauches d_1 et d_2 admettent une unique perpendiculaire commune p, celle-ci coupe d_1 en I_1 et d_2 en I_2.
La longueur I_1I_2 est la distance $\delta(d_1, d_2)$ de d_1 à d_2.

Soient les vecteurs $\vec{v}_1 \parallel d_1$, $\vec{v}_2 \parallel d_2$, et les points $A_1 \in d_1$, $A_2 \in d_2$.

Le vecteur $\vec{p} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ est directeur de la droite p.

La longueur de la projection du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ sur le vecteur $\vec{p}$ donne la distance $\delta(d_1, d_2)$ entre les droites d_1 et d_2.
Ainsi celle-ci est donnée par:

$$\delta(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|} \tag{36}$$

La formule n'est pas valable pour des droites parallèles, car le dénominateur est alors nul, dans ce cas on utilisera la formule (35) pour calculer la distance du point A_1 à la droite d_2.
Par contre, la formule reste valable pour des droites sécantes, car alors, les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont coplanaires et le numérateur (produit mixte) est nul.

6.8 Résumé

Equations	droite	plan
cartésiennes	Formule (34)	Formule (24)
paramétriques	Formules (31) et (33)	Formules (27) et (28)

7 Ellipse

7.1 Définition des jardiniers

L'ellipse est le lieu des points P du plan dont la somme des distances à deux points fixes F_1 et F_2 est une constante $2a$.

Construction:
Soient F_1 et F_2 deux pieux fixés. Attacher une corde de longueur $2a$ aux pieux par ses extrémités. Tendre la corde à l'aide d'un troisième pieu et tourner. On obtient un tracé continu de l'ellipse.

Les points F_1 et F_2 sont les **foyers** de l'ellipse, la distance $F_1F_2 = 2c, a \geq c$ est la **distance focale**.

Définition de l'ellipse par deux foyers:
C'est le lieu des points P du plan dont la somme des distances à deux points fixes est une constante.

$$PF_1 + PF_2 = 2a \tag{37}$$

PF_1 et PF_2 sont les **rayons focaux**.

Le milieu C du segment F_1F_2 est un centre de symétrie de l'ellipse. C'est le **centre** de l'ellipse.

La droite (F_1F_2) est un axe de symétrie de l'ellipse. C'est le **grand axe** de l'ellipse.

La médiatrice de F_1F_2 est aussi un axe de symétrie de l'ellipse. C'est le **petit axe** de l'ellipse.

Le grand axe coupe l'ellipse en deux **sommets** A_1 et A_2.
Le petit axe coupe l'ellipse en deux autres **sommets** B_1 et B_2.

Lorsque $P = A_1$, on a

$$2a = A_1F_1 + A_1F_2 = A_1F_1 + A_1F_1 + F_1F_2 = A_1F_1 + A_2F_2 + F_1F_2 = A_1A_2$$

$A_1A_2 = 2a$ est appelé le **grand axe** et $B_1B_2 = 2b$ le **petit axe**.

$B_1F_1 = B_2F_2$ et (37) impliquent

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2} \tag{38}$$

L'**excentricité** $\boldsymbol{e}$ de l'ellipse est définie par

$$\boldsymbol{e = c/a} \tag{39}$$

c'est une quantité $0 \leq e \leq 1$ comprise entre 0 (cercle) et 1 (segment).

7.2 Equation cartésienne réduite

Plaçons un système d'axes Oxy, O au centre de l'ellipse, Ox sur le grand axe et Oy sur le petit axe.
Donc $C(0;0), F1(-c;0), F2(+c;0)$.
Un petit calcul permet d'obtenir l'équation cartésienne de l'ellipse "couchée":

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{40}$$

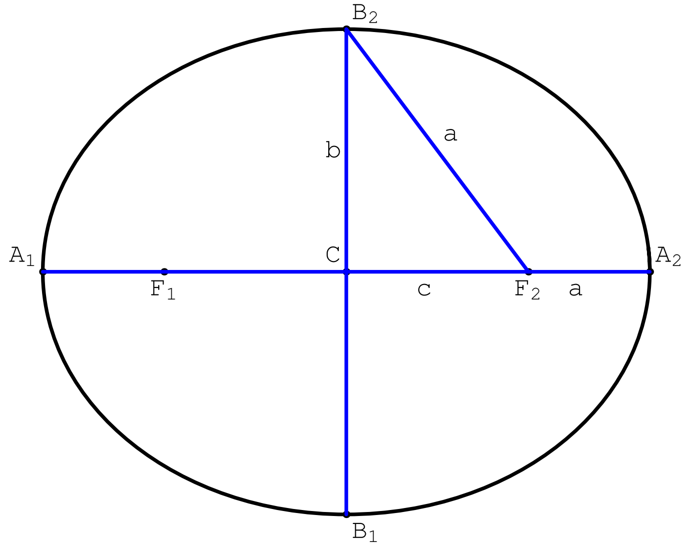


Figure 15: Axes, sommets et foyers d'une ellipse, $B_2F_2 = CA_2$.

En permutant x et y, on obtient l'ellipse "debout":

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{41}$$

7.3 Définition par foyer-directrice

L'ellipse est le lieu des points P du plan dont le rapport des distances à un point fixe F_1 et à une droite fixe d_1 est une constante e, $0 < e < 1$.
La droite d_1 est perpendiculaire au grand axe d'équation $x = a/e$.
Par symétrie, il existe une seconde droite d_2 d'équation $x = -a/e$.
Ces droites sont perpendiculaires au grand axe, ce sont les **directrices** de l'ellipse.

Exercice:
Déduire une construction point par point de l'ellipse.

7.4 Equation cartésienne semi-réduite

Si le centre $C(\alpha;\beta)$ de l'ellipse n'est pas en O, translatons le système d'axes en $Cx'y'$.
Les formules de passage sont données par $x' = x - \alpha,\ y' = y - \beta$.
Dans le nouveau système d'axes l'ellipse admet l'équation réduite $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$
Donc dans l'ancien système, elle a pour équation:

$$\boldsymbol{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1} \tag{42}$$

De même pour l'ellipse "debout":

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1 \tag{43}$$

A partir des équations (42) et (43), on peut aisément retrouver le centre et les demi-axes.

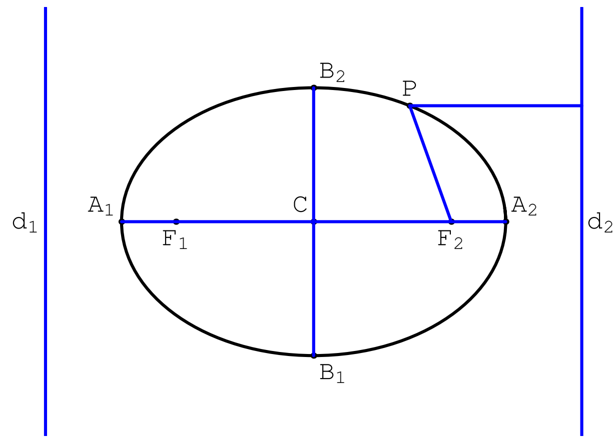


Figure 16: Axes, sommets, foyers et directrices d'une ellipse.

Exemple 6

$$6x^2 + 4y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$$

Groupons les termes en x et en y et mettons les coefficients des termes quadratiques en évidence:

$$6(x^2 + \frac{1}{3}x) + 4(y^2 + y) - 1 = 0$$

Ajoutons $6 \cdot \frac{1}{36}$ et $4 \cdot \frac{1}{4}$ à chaque membre pour compléter les carrés:

$$6(x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}) + 4(y^2 + y + \frac{1}{4}) - 1 = 6 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{1}{4}$$

Formons les carrés:

$$6(x + \frac{1}{6})^2 + 4(y + \frac{1}{2})^2 = 6 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{13}{6}$$

C'est-à-dire:

$$\frac{(x + \frac{1}{6})^2}{b^2} + \frac{(y + \frac{1}{2})^2}{a^2} = 1$$

avec $b = \sqrt{\frac{13}{36}}$ et $a = \sqrt{\frac{13}{24}}$.

C'est l'équation d'une ellipse de centre $C(-\frac{1}{6}; -\frac{1}{2})$ de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$, dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées.

7.5 Equations paramétriques et construction des deux cercles

Pour chaque valeur de l'angle γ, le point $P(\alpha + a\cos(\gamma), \beta + b\sin(\gamma))$ satisfait à l'équation de l'ellipse, on obtient ainsi les équations paramétriques de l'ellipse

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{x(\gamma)} & = & \boldsymbol{\alpha + a\cos(\gamma)} \\ \boldsymbol{y(\gamma)} & = & \boldsymbol{\beta + b\sin(\gamma)} \end{array} \right\} \qquad (44)$$

La signification géométrique du paramètre γ est donnée par la **construction des deux cercles**:

1) Dessiner deux cercles de rayons a et b centrés en C.
2) Tirer une demi-droite variable CMN coupant les cercles aux points M et N.
3) Une droite verticale par M et une horizontale par N se coupent en un point P de l'ellipse.
4) Le paramètre γ est l'angle que fait CNM avec l'axe focal.

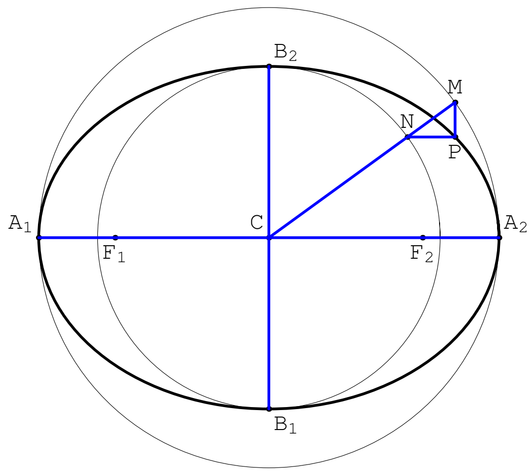


Figure 17: Construction d'une ellipse par les deux cercles.

7.6 Propriété focale de l'ellipse

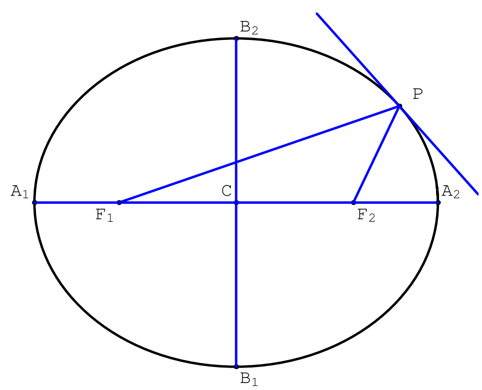


Figure 18: La tangente en un point P de l'ellipse est bissectrice extérieure des rayons focaux F_1P, F_2P.

8 Hyperbole

8.1 Définition des jardiniers

L'hyperbole est le lieu des points P du plan dont la différence des distances à deux points fixes F_1 et F_2 est une constante $2a$.

Les points F_1 et F_2 sont les **foyers** de l'hyperbole et la **distance focale** vaut $F1F2 = 2c, a \leq c$.

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \tag{45}$$

Cela détermine les deux **branches** (disjointes) d'équations $PF_1 - PF_2 = 2a$ et $PF_2 - PF_1 = 2a$, de l'hyperbole.
Le milieu C du segment F_1F_2 est un centre de symétrie de l'hyperbole, c'est le **centre** de l'hyperbole.
La droite (F_1F_2) est un axe de symétrie de l'hyperbole, c'est l'**axe transverse**.
La médiatrice de F_1F_2 est aussi un axe de symétrie de l'hyperbole, c'est l'**axe non transverse**.
L'axe transverse coupe l'hyperbole en deux **sommets** A_1 et A_2.
Sur l'axe non transverse de l'hyperbole, on définit également deux **sommets** B_1 et B_2, mais ce ne sont pas des points de l'hyperbole!
On a alors $A_1A_2 = 2a$ (axe transverse), $B_1B_2 = 2b$ (axe non transverse), et

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2} \tag{46}$$

Remarque:
Contrairement à l'ellipse, a n'est pas nécessairement supérieur à b!

L'**excentricité** e de l'hyperbole est définie par $e = c/a$, elle est comprise entre 1 et ∞.

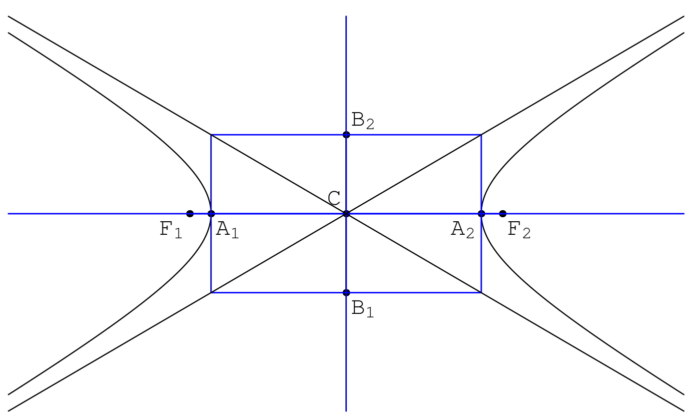


Figure 19: Sommets, foyers, axes et asymptotes d'une hyperbole.

8.2 Equations cartésiennes

Plaçons un système d'axes Oxy, O au centre de l'hyperbole, Ox et Oy parallèles aux axes de l'hyperbole.
On obtient l'équation cartésienne de l'hyperbole d'axe transverse Ox:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{47}$$

et celle d'axe transverse Oy:

$$-\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{b^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{a^2}} = \mathbf{1} \tag{48}$$

Si le centre de l'hyperbole est $C(\alpha;\beta)$:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \tag{49}$$

$$-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1 \tag{50}$$

Rappelons que a n'est pas nécessairement supérieur à b, dans chaque équation, il est possible de permuter a et b.
Ce n'est donc pas la valeur de a ou b qui distingue les deux types d'hyperboles, mais plutôt la position du signe négatif.

En posant $x = 0$ ou $y = 0$ on peut distinguer la position de l'axe transverse.

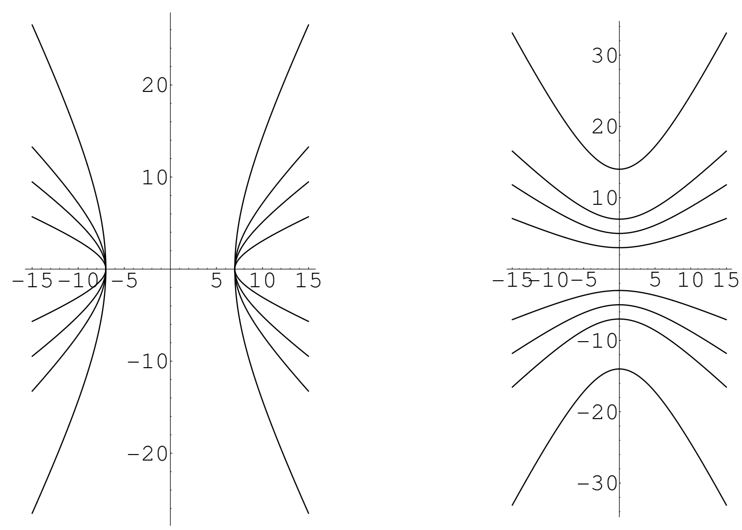


Figure 20: Hyperboles couchées et debout: a = 7, b = 3, 5, 7, 14

8.3 Asymptotes

Les asymptotes de l'hyperbole d'axe transverse horizontal et de centre O sont les droites:

$$y = \pm\frac{b}{a}\,x \tag{51}$$

Les asymptotes de l'hyperbole d'axe transverse vertical et de centre O sont les droites:

$$y = \pm\frac{a}{b}\,x \tag{52}$$

Exemples

- $$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

  admet l'axe transverse Ox; $a = 3, b = 4$ et les asymptotes $y = \pm\frac{4}{3}\,x$.

- $$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

  admet l'axe transverse Ox; $a = 4, b = 3$ et les asymptotes $y = \pm\frac{3}{4}\,x$.

- $$-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

  admet l'axe transverse Oy; $a = 4, b = 3$ et les asymptotes $y = \pm\frac{4}{3}\,x$.

- $$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

  admet l'axe transverse Oy; $a = 3, b = 4$ et les asymptotes $y = \pm\frac{3}{4}\,x$.

Les hyperboles $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ et $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ont les mêmes asymptotes $y = \pm\frac{4}{3}\,x$.

8.4 Hyperbole équilatère

Si $\boldsymbol{a = b}$, l'hyperbole est dite **équilatère**, son équation réduite est

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2} \tag{53}$$

ou

$$\boldsymbol{-x^2 + y^2 = a^2} \tag{54}$$

Ses asymptotes $\boldsymbol{y = \pm\, x}$ se coupent à angle droit.
Son excentricité vaut $e = \sqrt{2}$.
Comme les asymptotes se coupent à angle droit, il est possible de faire tourner de -45^0 le système d'axes, la nouvelle équation de l'hyperbole équilatère est:

$$xy = \pm\, a^2/2 \tag{55}$$

En tirant y, on obtient la forme explicite :

$$y = \pm\,\frac{a^2}{2}\,\frac{1}{x} \tag{56}$$

8.5 Définition par foyer et directrice

L'hyperbole est aussi le lieu des points P du plan dont le rapport des distances à un point fixe F_1 et à une droite fixe d_1 est une constante positive $e > 1$.
On démontre alors l'existence d'un second foyer F_2 et d'une seconde directrice d_2.

8.6 Equations paramétriques

Pour chaque valeur de γ, le point $P(\pm a\cosh(\gamma), b\sinh(\gamma))$ satisfait à l'équation (47) et $P(b\sinh(\gamma), \pm a\cosh(\gamma))$ satisfait à (48).
On en déduit les équation paramétriques de l'hyperbole de centre $C(\alpha;\beta)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha \pm a\cosh(\gamma) \\ y & = & \beta + b\sinh(\gamma) \end{array}\right\} \tag{57}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha + b\sinh(\gamma) \\ y & = & \beta \pm a\cosh(\gamma) \end{array}\right\} \tag{58}$$

La signification géométrique du paramètre γ sera vue au cours de calcul intégral.

8.7 Propriété focale de l'hyperbole

La tangente en un point P de l'hyperbole est bissectrice intérieure des rayons focaux F_1P et F_2P au point de contact.

9 Parabole

9.1 Définition

La parabole est le lieu des points P équidistants d'une droite fixe d et d'un point fixe F.
F est le **foyer** de la parabole et d sa **directrice**.
Le **paramètre** de la parabole est la distance de F à d.
La droite passant par F et perpendiculaire à d est un axe de symétrie, c'est l'**axe** de la parabole.
Il coupe celle-ci au **sommet** S de la parabole.
Par analogie avec les deux autres coniques, on dit que la parabole est d'excentricité $e = 1$.

Exercice:
Donner une construction point par point de la parabole.

9.2 Equations cartésiennes réduites

Plaçons l'origine au sommet, l'axe Ox selon l'axe de la parabole et l'axe Oy selon la tangente au sommet, ou le contraire.
On obtient les équations cartésiennes réduites des paraboles "couchée" ou "debout":

$$\begin{array}{lcl} y^2 & = & 2p\,x \\ y^2 & = & -2p\,x \\ x^2 & = & 2p\,y \\ x^2 & = & -2p\,y \end{array} \tag{59}$$

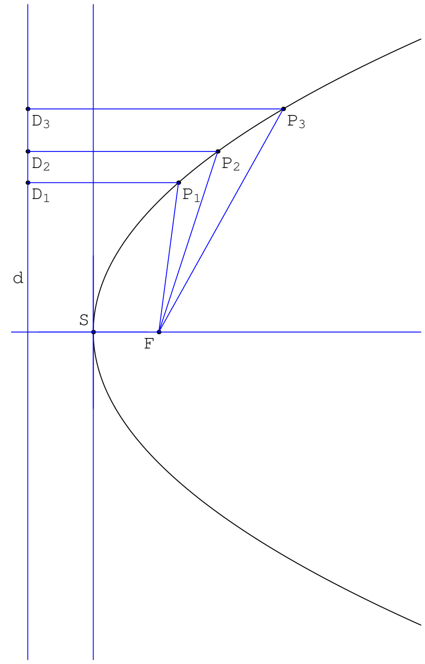


Figure 21: Sommet, foyer, axe et tangente au sommet d'une parabole.

Remarque: Les deux premières équations sont du type

$$y = \pm\sqrt{k\,x}$$

9.3 Equations cartésiennes semi-réduites

Si le sommet est $S\,(\alpha;\beta)$, par une translation des axes, on obtient les équations semi-réduites:

$$\begin{aligned}
(y-\beta)^2 &= 2p(x-\alpha)\\
(y-\beta)^2 &= -2p(x-\alpha)\\
(x-\alpha)^2 &= 2p(y-\beta)\\
(x-\alpha)^2 &= -2p(y-\beta)
\end{aligned} \tag{60}$$

A partir des équations (60), on peut aisément retrouver le sommet et le foyer.

Exemple 7

$$6x^2 + 2x + 4y - 1 = 0$$

Groupons les termes en x et mettons 6 en évidence:

$$6(x^2 + \frac{1}{3}\,x) + 4y - 1 = 0$$

Ajoutons $6 \cdot \dfrac{1}{36}$ à chaque membre pour compléter le carré:

$$6(x^2 + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{36}) + 4y - 1 = 6 \cdot \frac{1}{36}$$

Formons le carré:

$$6(x+\frac{1}{6})^2+4y=6\cdot\frac{1}{36}+1=\frac{7}{6}$$

ou encore:

$$4y-\frac{7}{6}=-6(x+\frac{1}{6})^2$$

$$(x+\frac{1}{6})^2=-\frac{2}{3}(y-\frac{7}{24})$$

C'est l'équation d'une parabole de sommet $S\,(-\frac{1}{6};\frac{7}{24})$*, dont l'axe est parallèle à l'ordonnée, côté négatif, et dont le paramètre* $p=\frac{1}{3}$.

9.4 Propriété focale de la parabole

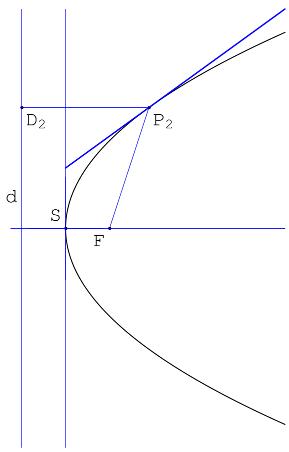


Figure 22: La tangente en un point P de la parabole est bissectrice du rayon focal FP et de la perpendiculaire abaissée de P sur la directrice.

10 Exercices

10.1 Droite dans le plan

Exercice 1
Donner l'équation cartésienne de la droite de conversion des degrés Fahrenheit en degrés Celsius.

Exercice 2
Donner l'équation cartésienne de la droite de conversion entre l'échelle des points d'un test et la note (le maximum de points est max).

Exercice 3
L'écran d'un ordinateur a un système d'axes OXY dont l'origine O est en haut à gauche, l'axe des X est dirigé horizontalement vers la droite et celui des Y verticalement vers le bas.
L'écran admet une résolution de $MaxX$ pixels en ligne et $MaxY$ en colonnes.
On aimerait représenter une fonction dans un système d'axes traditionnel Oxy, avec

$$xmin \leq x \leq xmax, ymin \leq y \leq ymax$$

Donner les équations des droites de conversion $X = X(x)$ et $Y = Y(y)$.

Exercice 4
Donner l'équation cartésienne des droites d suivantes:

a) d passe par les points $A(2; 3)$ et $B(4; -2)$.
b) d passe par $A(2; 3)$ et est de pente 3.
c) d passe par $A(2; 3)$ et est parallèle au vecteur $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$.
d) d passe par $A(2; 3)$ et est parallèle à la droite $e : 2x + 3y - 1 = 0$.
e) d passe par $A(2; 3)$ et est perpendiculaire à la droite $e : 2x + 3y - 1 = 0$.
f) d passe par $A(2; 3)$ et par $B(2; 5)$.
g) d passe par $A(2; 3)$ et par $B(5; 3)$.

Exercice 5
Donner la pente, trois vecteurs directeurs, trois vecteurs normaux, les points situés sur les axes de coordonnée et les angles avec ceux-ci de la droite $d : 3x - 4y + 5 = 0$.

Exercice 6
Indiquer parmi les paires de droites suivantes, lesquelles sont parallèles, confondues, sécantes ou perpendiculaires:
a) $d : 2x + 3y = 5, e : 2x - 3y = -5$.
b) $d : 2x + 3y = 5, e : 2x + 3y = -5$.
c) $d : 2x + 3y = 5, e : -2x + 3y = -5$.
d) $d : 2x + 3y = 5, e : 4x + 6y - 10 = 0$.
e) $d : 2x + 3y = 0, e : 2x - 3y = 0$.
f) $d : 2x + 3y = 0, e : 3x - 2y = 0$.
g) $d : 2x + 3 = 0, e : 2x - 3 = 0$.
h) $d : 2 + 3y = 0, e : 2 - 3y = 0$.

Exercice 7
Indiquer si les droites suivantes sont se coupent en un point unique:
$d : 2x + 3y = 5, e : 3x - 5y = 10, f : 7x + y = 20$.

Exercice 8
Soit le triangle $ABC, A(0;3), B(-1;0), C(4;0)$.
Donner les longueurs des côtés et celles des hauteurs.
Calculer les équations des côtés, des hauteurs, des médiatrices, des médianes et des bissectrices de l'angle en A *du triangle.*
Vérifier que les trois médiatrices se coupent en un point M*, le centre du cercle circonscrit à* ABC*. Calculer son rayon.*
Vérifier que les trois médianes se coupent en un point G*, le centre de gravité de* ABC*. Vérifier que les coordonnées de* G *sont la moyenne de celles de* A, B *et* C.
Vérifier que les deux bissectrices issues de B *sont perpendiculaires.*
Vérifier que les points G, H *et* M *sont alignés.*

Exercice 9
a) Donner des équations paramétriques de la droite d *passant par* $A(1;2)$ *et de pente 3.*
b) Donner des équations paramétriques de la droite $d : 2x + 3y = 7$.
c) Donner l'équation cartésienne de la droite d *ayant les équations paramétriques*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 + 3k \\ y & = & 5 - k \end{array} \right\}$$

d) Donner les points sur les axes de la droite d *ayant les équations paramétriques*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3 + k \\ y & = & 2 - 3k \end{array} \right\}$$

Exercice 10
Calculer la distance entre les droites parallèles d *et* e. $d : 2x + 3y = 6, e : 4x + 6y = 13$.

Exercice 11
$A(-2;1)$ *est l'un des sommets d'un rectangle. Deux de ses côtés se trouvent sur les droites* $a : 3x-2y = 5$ *et* $b : 2x + 3y = 7$. *Calculer l'aire du rectangle ainsi que les équations des autres côtés.*

Exercice 12
Quelles sont les équations paramétriques des droites passant par $A(2;3)$ *et équidistantes des points* $B(10;2)$ *et* $C(0;4)$*?*

Exercice 13
Une entreprise fabrique deux produits P_1 *et* P_2 *à l'aide de trois machines* M_1, M_2 *et* M_3.
Pour réaliser une unité de P_1*, il faut 2h sur* M_1*, 1h sur* M_2 *et 3,5h sur* M_3.
Pour réaliser une unité de P_2*, il faut 2h sur* M_1*, 3,5h sur* M_2 *et 1h sur* M_3.
Le temps mensuel disponible sur les machines est de 100h sur M_1*, de 140h sur* M_2 *et de 140h sur* M_3.
Le profit unitaire est de 70.- sur P_1 *et 45.- sur* P_2.
Quel est le programme mensuel de production qui maximise le profit total?

Exercice 14
Chercher la solution optimale du système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ 5x_1 + 4x_2 & \geq & 200 \\ 3x_1 + 5x_2 & \geq & 180 \end{array} \right\}$$

$C = 30x_1 + 50x_2$ minimum.

10.2 Cercle dans le plan

Exercice 15
Donner les équations cartésiennes du cercle de centre $C(-2; 3)$ et de rayon 5 sous forme standard et sous forme développée.

Exercice 16
Indiquer si les courbes suivantes sont des cercles, si oui calculer les coordonnées du centre et la valeur du rayon:
a) $x^2 + y^2 = 16$.
b) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 22$.
c) $x^2 - y^2 = 16$.
d) $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 16$.
e) $5x^2 + 5y^2 - 2x + 3y = 16$.
f) $5x^2 + 5y^2 - 2x + 3y = -16$.
g) $5x^2 + y^2 - 2x + 3y = 16$.

Exercice 17
Donner une marche à suivre des calculs pour trouver les équations cartésiennes des cercles Γ de centre C et de rayon r suivants, discuter du nombre de solutions.
Facultatif: Trouver une construction géométrique à ces problèmes.
a) Γ *passe par* $A(2; 3)$, $C \in d : 2x + 3y = 5$, $r = 3$.
b) Γ *passe par* $A(2; 3)$, $C \in d : 2x + 3y = 5$, Γ *est tangent à la droite* $t : x + y = 4$.
c) Γ *est tangent aux droites* $t : x + y = 4$ *et* $u : x - y = 2$ *et* Γ *passe par* $A(2; 3)$.

Exercice 18
Donner les équations paramétriques du cercle Γ de centre $C(1; -1)$ et de rayon 3.

Exercice 19
Donner les équations des tangentes au cercle Γ de centre $C(1; -1)$ et de rayon 3 aux points du cercle d'abscisses 0.

Exercice 20
Donner les équations des tangentes au cercle Γ de centre $C(1; -1)$ et de rayon 3 parallèles à la droite $d : 2x - 4y = 5$.

Exercice 21
Donner les équations des tangentes au cercle Γ de centre $C(1; -1)$ et de rayon 3 passant par le point $P(5; 0)$.

Exercice 22
Indiquer si les cercles suivants sont tangents ou non:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$$
$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

10.3 Droite et plan dans l'espace

Exercice 23
Trouver l'équation du plan passant par le point $P(3; -2; 4)$ *et perpendiculaire au vecteur* $\overrightarrow{OP}$.

Exercice 24
Trouver l'équation du plan perpendiculaire au segment AB *en son milieu, où* $A(0; 2; 5), B(4; -4; 1)$.

Exercice 25
Trouver l'équation du plan passant par le point $P(5; 0; 1)$ *et parallèle au plan* $2x + 3y - z = 0$.

Exercice 26
Trouver l'équation du plan passant par le point $P(2; 0; -3)$ *et parallèle aux vecteurs* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$ *et* $\vec{b} = -3\vec{j} + 5\vec{k}$.

Exercice 27
Trouver l'aire du triangle ABC *si* $A(2; -1; 1), B(0; 4; 1), C(-1; 2; 3)$.

Exercice 28
Déterminer si les quatre points suivants sont dans un même plan: $A(1; 2; 3), B(2; 1; 3), C(3; 1; 2)$ *et* $D(3; 2; 1)$.

Exercice 29
Trouver des équations paramétriques et cartésienne du plan passant par les points $P(1; 1; 1), Q(2; -2; 2)$ *et* $R(4; -4; 1)$.

Exercice 30
Trouver la distance du point $P(1; 1; 1)$ *au plan* $x - 3y + z = 0$.

Exercice 31
Trouver la distance entre les plans parallèles $3x + y - 7z = 5$ *et* $3x + y - 7z = -12$.

Exercice 32
Trouver l'angle entre les plans $2x + 5y - 7z = -2$ *et* $x + y - z = -3$.

Exercice 33
Trouver l'équation d'un plan contenant l'axe des x *et perpendiculaire au plan* $x + 2y - 6z = -3$.

Exercice 34
Considérons un plan qui coupe les axes de coordonnées aux points $A(a; 0; 0), B(0; b; 0)$ *et* $C(0; 0; c)$. *Montrer que l'équation de ce plan peut s'écrire* $x/a + y/b + z/c = 1$.

Exercice 35
Deux plans α *et* β *sont donnés par:*
$A \in \alpha, \alpha \parallel \vec{a}, \alpha \parallel \vec{b}$ et $B \in \beta, \beta \parallel \vec{c}, \beta \parallel \vec{d}$.
Donner un critère pour reconnaître s'ils sont parallèles, confondus ou sécants. Dans ce dernier cas, donner un vecteur directeur de leur droite d'intersection.

Exercice 36
Trouver des équations cartésiennes d'une droite passant par les points $A(0; 2; -3)$ *et* $B(3; -3; 4)$.

Exercice 37
Trouver des équations cartésiennes de la droite d'intersection des plans $\alpha : 4x - y + z + 5 = 0$ *et* $\beta : x - 3y - 2z + 7 = 0$.

Exercice 38
Trouver le point d'intersection de la droite $d : \dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{-1}$
avec le plan $\alpha : 4x - 5y + z + 3 = 0$.

Exercice 39
Trouver des équations cartésiennes d'une droite passant par le point $A(2; 5; -3)$ *et perpendiculaire aux deux vecteurs* $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$.

Exercice 40
Montrer que la droite d *est située toute entière dans le plan* α*:*
$d : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{3}$, $\alpha : 4x + y + 2z - 5 = 0$.

Exercice 41
Trouver les points où la droite $d : \dfrac{x-8}{4} = \dfrac{2y+7}{3} = \dfrac{z-12}{6}$ *intersecte les plans de coordonnées.*

Exercice 42
Trouver la distance de l'origine à la droite $d : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{3} = z - 1$.

Exercice 43
Trouver des équations paramétriques de la droite $d : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{3} = z - 1$.

Exercice 44
Trouver des équations paramétriques du plan $\alpha : 4x - 5y + z + 3 = 0$.

Exercice 45
Deux droites a *et* b *sont données par,* $A \in a \parallel \vec{a}$ et $B \in b \parallel \vec{b}$. *Comment distinguer si elles sont parallèles, confondues, sécantes ou gauches?*

Exercice 46
Deux droites a *et* b *sont données par:* $A \in a$, $a \parallel \vec{a}$ et $B \in b$, $b \parallel \vec{b}$.
Un point P *n'est situé ni sur* a*, ni sur* b.
On cherche une droite d *passant par* P *et coupant* a *et* b.

Exercice 47
Données: Trois droites a, b *et* c*:* $A \in a$, $a \parallel \vec{a}$, $B \in b$, $b \parallel \vec{b}$ et $C \in c$, $c \parallel \vec{c}$.
Cherché: Une droite d *coupant* a, b *et* c.

Exercice 48
Données: Une droite d *et un point* P*:* $D \in d$, $d \parallel \vec{d}$.
Cherché: Le symétrique P' *de* P *par rapport* d.

Exercice 49
Données: Une droite d *et un plan* π*:* $D \in d$, $d \parallel \vec{v}_d, A \in \pi$, $\pi \perp \vec{n}_\pi$.
Cherchés: La projection d' *de* d *sur* π *ainsi que la droite* d''*, symétrique de* d *par rapport à* π.

Application numérique:

$$\pi : x + y + z = 1$$

et

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

10.4 Coniques

Exercice 50

Former l'équation cartésienne d'une ellipse dont les foyers sont $F_1(-c; 0)$ *et* $F_2(c; 0)$ *et dont les axes ont pour longueurs* $2a = 10$ *et* $2b = 4$.

Exercice 51

Donner les équations paramétriques de l'ellipse $9(x + 3)^2 + 25(y - 2)^2 = 225$ *, sa distance focale et son excentricité.*

Exercice 52

Une ellipse est tangente à l'abscisse au point $A(3; 0)$ *et à l'ordonnée au point* $B(0; -4)$. *Former l'équation de cette ellipse sachant que ses axes sont parallèles aux axes de coordonnées.*

Exercice 53

Vérifier que les équations suivantes représentent une ellipse, dont on déterminera le centre, les équations des axes et leur longueur, les coordonnées des foyers et des sommets, l'excentricité.
Représenter graphiquement ces ellipses avec leurs foyers.

a) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$

b) $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$

Exercice 54

Démontrer la propriété focale de l'ellipse.

Exercice 55

Prouver que les équations paramétriques

$$\left\{ \begin{array}{lcrl} x & = & \pm a & \cosh(\alpha) \\ y & = & b & \sinh(\alpha) \end{array} \right\}$$

décrivent une hyperbole de centre O et de demi-axes a *et* b.

Exercice 56

Former l'équation de l'hyperbole dont les foyers sont $F_1(-c; 0)$ *et* $F_2(c; 0)$, *donnée par*
a) ses axes de longueur $2a = 10$ *et* $2b = 8$.
b) sa distance focale $2c = 20$ *et les pentes de ses asymptotes* $\pm 4/3$.

Exercice 57

De l'hyperbole $16x^2 - 9y^2 = 144$, *déterminer:*
a) Les longueurs des demi-axes.
b) Les coordonnées des foyers.
c) Les coordonnéées des sommets.
d) L'excentricité.
e) Les équations des asymptotes.
f) Les points dont la distance au foyer d'abscisse négative vaut 7.

Exercice 58

Vérifier que les équations suivantes définissent une hyperbole dont on déterminera le centre, les équations et les longueurs des axes, les foyers, les sommets, l'excentricité et les équations des asymptotes.
Les représenter graphiquement.

a) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$
b) $9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y + 89 = 0$

Exercice 59
Vérifier que l'équation $xy = 18$ *définit une hyperbole équilatère dont on déterminera le centre, les équations des axes et des asymptotes, les longueurs des axes, les foyers, les sommets et l'excentricité. La représenter graphiquement.*

Exercice 60
a) Représenter sur un même dessin les paraboles d'équations $y^2 = 2x, y^2 = 4x$ *et* $y^2 = 6x$.
b) Représenter sur un même dessin les paraboles d'équations $x^2 = 2y, x^2 = 4y$ *et* $x^2 = 6y$. *Donner les foyers ainsi que les directrices.*

Exercice 61
Prouver que la longueur de la demi-corde perpendiculaire à l'axe au foyer d'une parabole est égale au paramètre. Le vérifier graphiquement sur les dessins de l'exercice précédent.

Exercice 62
Former l'équation de la parabole donnée par:
a) Son foyer $F(-7; 0)$ *et sa directrice* $x - 7 = 0$.
b) Son foyer $F(2; 4)$ *et sa directrice* $y + 8 = 0$.
Représenter ces courbes à l'aide de la construction vue au cours.

Exercice 63
Vérifier que chacune des équations suivantes définit une parabole et en déterminer le paramètre p, *le sommet* S, *le foyer* F, *les équations de la directrice* d *et de l'axe* a*:*

a) $x^2 = 6y + 2$
b) $y = 4x^2 - 8x + 7$

Exercice 64
Déterminer la position relative de la droite d *et de la conique* C. *Calculer, s'il y a lieu, les coordonnées des points d'intersection ou du point de tangence. Faire une esquisse.*

1) $d : 2x + y - 10 = 0 \quad C : 4x^2 + 9y^2 = 36$
2) $d : x + y - 2 = 0 \quad C : x^2 = -8y$
3) $d : 3x + 4y - 1 = 0 \quad C : xy = 16$
4) $d : x + y - 1 = 0 \quad C : x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

Exercice 65
Déterminer les valeurs de la pente m *de la droite* $y = mx - 4$ *pour lesquelles celle-ci coupe la conique*
a) $(y - 1)^2 = -4(x - 3)$.
b) $9(x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 = -36$.

Exercice 66
Déterminer les tangentes de pente -1 à la conique $(x + 2)^2 + 4(y - 3)^2 = 20$.

Exercice 67
Déterminer la tangente et la normale à la conique C *au point* M*:*

1) $M(-3; 8/5) \quad C : 4x^2 + 25y^2 = 100$
2) $M(-5; 9/4) \quad C : 9x^2 - 16y^2 = 144$
3) $M(-8; 3) \quad C : xy - x + 2y + 10 = 0$

11 Corrigé des exercices

Corrigé ex 1

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Corrigé ex 2
La droite passe par les points $(0; 1)$ *et* $(max, 6)$. *Donc*

$$N = \frac{5}{max}P + 1$$

Corrigé ex 3
On peut traiter séparément chaque axe.
Axe des x*:*
Lorsque $x = xmin, X = 0$, *lorsque* $x = xmax, X = MaxX$.
Donc la droite $X = X(x)$ *passe par les deux points* $(xmin; 0)$ *et* $(xmax; maxX)$.
L'équation de la droite est donc

$$X = \frac{MaxX}{xmax - xmin}(x - xmin)$$

Axe des y*:*
Lorsque $y = ymin, Y = MaxY$, *lorsque* $y = ymax, Y = 0$.
Donc la droite $Y = Y(y)$ *passe par les deux points* $(ymin; MaxY)$ *et* $(ymax; 0)$.
L'équation de la droite est donc

$$Y = \frac{MaxY}{ymin - ymax}(y - ymax)$$

Corrigé ex 4
a) 5x + 2y - 16 = 0
b) y = 3x - 3
c) 5x - 3y - 1 = 0
d) 2x + 3y - 13 = 0
e) 3x - 2y = 0
f) x = 2
g) y = 3

Corrigé ex 5
a) pente = 3/4
b) $4\vec{i} + 3\vec{j},\ 8\vec{i} + 6\vec{j},\ -4\vec{i} - 3\vec{j}$
c) $3\vec{i} - 4\vec{j},\ -3\vec{i} + 4\vec{j},\ 6\vec{i} - 8\vec{j}$
d) $(-5/3; 0),\ (0; 5/4)$
e) $\arctan(3/4) \approx 36,8°$ *avec* Ox *et* $90° - \arctan(3/4) \approx 53,1°$ *avec* Oy.

Corrigé ex 6
a) sécantes
b) parallèles
c) sécantes
d) confondues
e) sécantes
f) perpendiculaires
g) parallèles
h) parallèles.

Corrigé ex 7
Oui. Le déterminant est nul.

Corrigé ex 8
Equations des côtés: $AB : 3x - y + 3 = 0, BC : y = 0, CA : 3x + 4y - 12 = 0.$
Equations des hauteurs: $h_A : x = 0, h_B : 4x - 3y + 4 = 0, h_C : -x - 3y + 4 = 0.$
Equations des médiatrices: $m_A : 2x - 3 = 0, m_B : 8x - 6y - 7 = 0, m_C : x + 3y - 4 = 0.$
Equations des médianes: $g_A : 2x + y - 3 = 0, g_B : -x + 2y - 1 = 0, g_C : -x - 3y + 4 = 0.$
Equations des bissectrices (intérieures, puis extérieures):
$b_A : (15 + 3\sqrt{10})x + (-5 + \sqrt{160})y + 15 - 3\sqrt{160} = 0$ *et* $(15 - 3\sqrt{10})x - (5 + \sqrt{160})y + 15 + 3\sqrt{160} = 0.$
$b_B : 3x - (1 + \sqrt{10})y + 3 = 0$ *et* $3x + (-1 + \sqrt{10})y + 3 = 0.$
$b_C : x + 3y - 4 = 0$ *et* $-3x + y + 12 = 0.$
Longeurs des côtés: $AB : \sqrt{10}, BC : 5, CA : 5.$
Longueurs des hauteurs: $h_A : 3, h_B : 3, h_C : 3\sqrt{5/2}.$
L'aire vaut 15/2.
Orthocentre $H(0; 4/3)$
Centre du cercle circonscrit $M(3/2; 5/6)$. *Rayon* $\frac{5}{6}\sqrt{10}.$
Centre de gravité $G(1; 1).$
Les deux bissectrices issues de B sont perpendiculaires car leurs pentes valent $\frac{3}{1+\sqrt{10}}$ *et* $\frac{3}{1-\sqrt{10}}$ *et leur produit vaut -1.*
Les points G, H *et* M *sont alignés car la pente de* GH *vaut - 1/3 et celle de* GM *aussi.*

Corrigé ex 9
a)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + k \\ y & = & 2 + 3k \end{array} \right\}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{7}{2} - 3k \\ y & = & 2k \end{array} \right\}$$

c) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-5}{-1}$
d) $x = 0 \Rightarrow k = -3 \Rightarrow y = 11$ *et* $y = 0 \Rightarrow k = 2/3 \Rightarrow x = 11/3.$

Corrigé ex 10
On choisit un point de d, *par exemple* $A(0; 2)$, *et on calcule la distance de* A *à* e.
On trouve $|\dfrac{-1}{\sqrt{52}}| = \dfrac{1}{\sqrt{52}}.$

Corrigé ex 11
Comme les coordonnées du point A ne vérifient pas les équations des droites données, on en conclut que celles-ci sont supports des côtés du rectangle opposés à A. *La distance de* A *à ces droites donnent les dimensions du rectangle.*

$$L = \delta(A, a) = \frac{3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 - 5}{\sqrt{13}} = -\sqrt{13}$$

$$M = \delta(A, b) = \frac{2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 - 7}{\sqrt{13}} = \frac{-8}{\sqrt{13}}$$

Donc l'aire vaut $|LM| = |-8| = 8$.
Les deux autres côtés, c *et* d*, passent par* A *et sont parallèles à* a *et* b *respectivement.*
Donc $c : 3x - 2y = h$ *et* $d : 2x + 3y = k$ *(mêmes vecteurs normaux que* a *et* b *!).*
Il faut calculer h *et* k *pour que les coordonnées de* A *vérifient les équations de* c *et de* d*.*
D'où $c : 3x - 2y = -8$ *et* $d : 2x + 3y = -1$.

Corrigé ex 12
Il s'agit des droites d *parallèle à* $\overrightarrow{BC}$ *par* A *et* e *passant par* A *et par le milieu* M *de* BC*.*
Comme $\overrightarrow{BC} = -10\vec{i} + 2\vec{j}$*, la première droite admet les équations paramétriques:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 - 10k \\ y & = & 3 + 2k \end{array} \right\}$$

D'autre part, $M(5;3)$*. D'où* $\overrightarrow{MA} = -3\vec{i}$*, et la seconde droite est*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 - 3k \\ y & = & 3 \end{array} \right\}$$

Corrigé ex 13
Récapitulons les données sous forme de tableau:

	Machine M_1	*Machine* M_2	*Machine* M_3	*Profit unitaire*
Produit P_1	*2h*	*1h*	*3,5h*	*70.-*
Produit P_2	*2h*	*3,5h*	*1h*	*45.-*
Temps disponible	*100h*	*140h*	*140h*	

Soit x_1 *le nombre d'unités* P_1 *et* x_2 *le nombre d'unités* P_2*.*
On doit avoir les contraintes logiques $x_1 \geq 0$ *et* $x_2 \geq 0$ *et les contraintes économiques:*
(1) $2x_1 + 2x_2 \leq 100$ *(contrainte de temps sur la machine* M_1*)*
(2) $x_1 + 3,5x_2 \leq 140$ *(contrainte de temps sur la machine* M_2*)*
(3) $3,5x_1 + x_2 \leq 140$ *(contrainte de temps sur la machine* M_3*).*
Le bénéfice à maximiser est $B = 70x_1 + 45x_2$*. C'est la fonction objectif.*
Les points du plan Ox_1x_2 *satisfaisant aux contraintes sont dans un polygone convexe* $OABCD$*. De* $B = 70x_1 + 45x_2$*, on tire*

$$d : x_2 = -\frac{70}{45}x_1 + \frac{B}{45}$$

B *est maximal lorsque l'ordonnée à l'origine des parallèles à* d *est maximal.*
Le profit est maximal lorsque $x_1 = 36$ *et* $x_2 = 14$*, il vaut alors* $3150.-$

	Machine M_1	*Machine* M_2	*Machine* M_3
Produit P_1	*72h*	*36h*	*126h*
Produit P_2	*28h*	*49h*	*14h*
Temps total	*100h*	*85h*	*140h*

Corrigé ex 14
Le minimum est atteint en $I(\frac{280}{13}; \frac{300}{13})$ *ou* $(60; 0)$ *ou sur n'importe quel point du segment.*
Le coût vaut 1800.−

Corrigé ex 15
$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ *et* $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$.

Corrigé ex 16
a) $C(0; 0), r = 4$
b) $C(3; -3), r = \sqrt{22}$
c) hyperbole
d) $C(1; -3/2), r = \frac{\sqrt{77}}{2}$
e) $C(1/5; -3/10), r = \frac{\sqrt{333}}{10}$
f) imaginaire
g) ellipse.

Corrigé ex 17
a) Il y a deux solutions.
Solution géométrique: *- On trace un cercle de rayon 3 centré en* A.
- Il coupe la droite d *en* C_1 *et* C_2*, qui sont les centres des cercles cherchés.*
Solution algèbrique:
- On donne un nom aux inconnues, soit les coordonnées du centre $C(a; b)$.
- On traduit en équations les conditions imposées à C*:*
$C \in d$ *donne* $2a + 3b = 5$,
$AC = 3$ *donne* $(a-2)^2 + (b-3)^2 = 9$.
- On résout le système et on trouve les deux solutions:
$(x - 2,45)^2 + (y - 0,034)^2 = 9$ *et* $(x + 0,91)^2 + (y - 2,27)^2 = 9$.

b) Il n'y a pas de solutions.
Solution géométrique:
Homothétie de centre $M = t \cap d$*:*
- On construit un cercle auxillaire tangent à t *et centré en* G *sur* d.
- On trace la droite $g = MA$*. Elle coupe le cercle auxillaire en* A_1 *et* A_2.
- On trace la parallèle à MA_1 *par* A*, elle coupe* d *en* C_1.
- On trace la parallèle à MA_2 *par* A*, elle coupe* d *en* C_2.
- C_1 *et* C_2 *sont les centres des cercles cherchés.*
- Conditions d'existence: A *doit être dans le double secteur défini par* t *et* t'*,* t' *étant la droite symétrique de* t *par rapport à* d.
Solution algèbrique:
- On donne un nom aux inconnues, soit les coordonnées du centre $C(a; b)$ *et le rayon* r.
- On traduit en équations les conditions imposées à C:
$C \in d$ *donne* $2a + 3b = 5$, $AC = r$ *donne* $(a-2)^2 + (b-3)^2 = r^2$, $(C, t) = r$ *donne* $|\frac{a+b-4}{\sqrt{2}}| = r$.
- On résout le système et on trouve une équation du second degré dont le discriminant est négatif.
Il n'y a donc pas de solution.

c) $(x-3)^2 + (y - (5 - \sqrt{6}))^2 = 11 - 4\sqrt{6}$ *et* $(x-3)^2 + (y - (5 + \sqrt{6}))^2 = 11 + 4\sqrt{6}$.

Corrigé ex 18

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1+3\cos(\alpha) \\ y & = & -1+3\sin(\alpha) \end{array} \right\}$$

Corrigé ex 19

$$P(0;-1\pm\sqrt{8}),\ t:\pm\sqrt{8}\cdot y = x-(-8\pm\sqrt{8})$$

Corrigé ex 20

$$m=\frac{1}{2},\ t: y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Corrigé ex 21
La polaire est $y=-4x+12$. Les tangentes sont $t_1: y\approx -0,64x+3,2$, $t_2: y\approx 1,78x-8,9$ et les points de contacts $T_1(3,6,-2,46)$ et $T_2(2,6;1,52)$.

Corrigé ex 22
Le premier est centré en $C_1(3;-4)$ de rayon $r_1=3$ et le second en $C_2(4;3)$ de rayon $r_2=2$.
La distance des centres vaut $C_1C_2=\sqrt{50}\neq r_1+r_2=5$. Ils ne sont pas tangents.

Corrigé ex 23

$$3x-2y+4z-29=0$$

Corrigé ex 24

$$4x-6y-4z-2=0$$

Corrigé ex 25

$$2x+3y-z-9=0$$

Corrigé ex 26

$$13x-10y-6z-44=0$$

Corrigé ex 27

$$\frac{\sqrt{197}}{2}$$

Corrigé ex 28
Oui, car le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ est nul.
Il représente le volume du parallèlotope de côtés $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Corrigé ex 29
Le plan est parallèle aux vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$, il passe par le point P par exemple. Ses équations paramétriques sont:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 + n + 3m \\ y & = & 1 - 3n - 5m \\ z & = & 1 + n \end{array} \right\}$$

Pour déterminer l'équation cartésienne, on peut éliminer les paramètres n et m du système. Une méthode plus rapide est de calculer le produit vectoriel $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, qui est normal au plan.
L'équation du plan est donc $5(x-1) + 3(y-1) + 4(z-1) = 0$, ou $5x + 3y + 4z - 12 = 0$.

Corrigé ex 30

$$\frac{\sqrt{11}}{11}$$

Corrigé ex 31

$$\frac{17}{\sqrt{59}}$$

Corrigé ex 32

$$\alpha = \arccos\left(\frac{14}{3\sqrt{26}}\right) \approx 23,7^0$$

Corrigé ex 33

$$3y + z = 0$$

Corrigé ex 34
Le plan est paralléle aux vecteurs $\overrightarrow{AB} = -a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\overrightarrow{AC} = -a\vec{i} + c\vec{k}$, donc il est perpendiculaire au vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = bc\,\vec{i} + ca\,\vec{j} + ab\,\vec{k}$.
Ainsi il admet l'équation cartésienne $bc(x-a) + ca(y-0) + ab(z-0) = 0$, en divisant par abc on trouve $x/a + y/b + z/c = 1$.

Corrigé ex 35
Les plans α et β sont parallèles ou confondus si leurs vecteurs normaux $\vec{n}_\alpha = \vec{a} \wedge \vec{b}$ et $\vec{n}_\beta = \vec{c} \wedge \vec{d}$ sont parallèles.
Ils sont confondus si, en plus, $\overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire aux vecteurs normaux.
S'ils sont sécants, la droite d'intersection i est perpendiculaire aux deux vecteur normaux.
Ainsi:

- $$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$$
- $$\alpha \parallel \beta \Longleftrightarrow \vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$$
- $$\alpha \cap \beta = i \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta$$

Corrigé ex 36

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+3}{7}$$

Corrigé ex 37
Il faut tout d'abord déterminer un point de la droite commune i.
On pose par exemple $x = 1$ et on résout le système des deux équations, on trouve $P(1; 26/5; -19/5)$.
Il faut ensuite un vecteur directeur de i, le produit vectoriel des vecteurs normaux aux plans donne $5\vec{i} + 9\vec{j} - 11\vec{k}$, ce vecteur est parallèle à i.

Corrigé ex 38

$$I(1; 2; 3)$$

Corrigé ex 39
La droite est parallèle à

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = 7\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

Corrigé ex 40
d passe par le point $A(1; 1; 0)$ et est parallèle au vecteur $\vec{d} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.
Le plan α est perpendiculaire au vecteur $\vec{n} = 4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
$\vec{d} \perp \vec{n}$, car le produit scalaire $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$. Donc $d \parallel \alpha$. Mais $A \in \alpha \Rightarrow d \in \alpha$.

Corrigé ex 41

$$(0; -13/2; 0) \text{ } et \text{ } (52/3; 0; 26)$$

Corrigé ex 42

$$\sqrt{\frac{59}{14}}$$

Corrigé ex 43
Il nous faut un point $P(1; 2, 1)$ et un vecteur directeur $\vec{d} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.
Les équations paramétriques de d sont alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - 2k \\ y & = & 2 + 3k \\ z & = & 1 + k \end{array} \right\}$$

Corrigé ex 44
Il nous faut un point P et deux vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Posons $x = y = 0$ dans l'équation de α, on tire $z = -3$, donc $P(0; 0; -3) \in \alpha$.
$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont perpendiculaires au vecteur $\vec{n} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$, on les choisit de sorte que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$.
Par exemple, $\vec{v} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{w} = \vec{j} + 5\vec{k}$
Les équations paramétriques de α sont alors:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 5k \\ y & = & 4k + m \\ z & = & -3 + 5m \end{array} \right\}$$

Corrigé ex 45
Elles sont paralléles ou confondues si $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
Elles sont confondues si en plus $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{b}$.
Elles sont sécantes si les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont coplanaires.*
Sinon elles sont gauches.
Ainsi:

- $$a = b \iff \vec{a} \wedge \vec{b} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{b} = \vec{0}$$
- $$a \parallel b \iff \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \neq \overrightarrow{AB} \wedge \vec{b}$$
- $$a, b \text{ sécantes } \iff \vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$$
- $$a, b \text{ gauches } \iff \vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \neq 0$$

Corrigé ex 46
Considérons le plan $\alpha = (P, a)$, *il coupe* b *en* Q, *la droite* PQ *est la droite* d *cherchée.*
Conditions d'existence:
1) Il faut que le plan α *ne soit pas parallèle à* b.
2) PQ *ne doit pas être parallèle à* a.

Corrigé ex 47
Prenons un point P *arbitraire sur la droite* c *et construisons la droite* d *passant par* P *et coupant les droites* a *et* b.

Corrigé ex 48
- *Solution 1:*

  Soit π *le plan perpendiculaire à* d *passant par* P, *il coupe* d *au point* M. *L'égalité des* **vecteurs** $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$ *détermine le point* P'.

- *Solution 2:*
  $\overrightarrow{PM}$ *est la projection de* $\overrightarrow{DP}$ *sur* $\vec{d}$.

Corrigé ex 49
Calculons les coordonnées du point $I = d \cap \pi$, *ce point est sur* d'.
Reste à trouver un vecteur directeur $\vec{v}_{d'}$ *de* d'.
Une première possibilité est de considérer le plan $\alpha = (d, d')$, *ce plan est perpendiculaire au plan* π, *donc il est parallèle à* $\vec{n}_\pi$, *il est aussi parallèle à* $\vec{v}_d$, *donc il est perpendiculaire à* $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\pi \wedge \vec{v}_d$.
d' *est l'intersection des plans* α *et* π, *ainsi*

$$\vec{v}_{d'} = \vec{n}_\pi \wedge \vec{n}_\alpha = \vec{n}_\pi \wedge (\vec{n}_\pi \wedge \vec{v}_d)$$

Une variante est de calculer la projection $\vec{p}$ *de* $\vec{v}_d$ *sur* $\vec{n}_\pi$ *et alors*

$$\vec{v}_{d'} = \vec{v}_d - \vec{p}$$

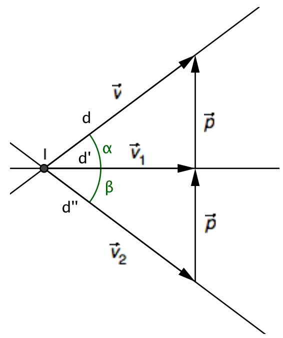


Figure 23: $\alpha = \beta$. La droite d est parallèle au vecteur $\vec{v}$, la projection d' sur le plan π est parallèle à $\vec{v}_1$ et la symétrique d'' est parallèle à $\vec{v}_2$, $\vec{p}$ est la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{n}_\pi$.

Un vecteur directeur de d'' est donné par

$$\vec{v}_{d''} = \vec{v}_d - 2\,\vec{p}$$

Application numérique:

La résolution du système formé par les équations de la droite d et du plan π fournit les coordonnées du point d'intersection I:

$$I(-\frac{1}{9}; \frac{3}{9}; \frac{7}{9})$$

La première variante donne

$$\vec{v}_{d'} = 3\,\vec{i} - 3\,\vec{k}$$

La seconde variante donne

$$\vec{p} = 3\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

et

$$\vec{v}_{d'} = -\vec{i} + \vec{k}$$

ainsi que

$$\vec{v}_{d''} = -4\,\vec{i} - 3\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$$

Corrigé ex 50

L'axe focal est Ox. Donc l'équation cartésienne de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Corrigé ex 51

En divisant par 225 on met l'ellipse sous forme semi-réduite:

$$\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Le centre est $C(-3; 2)$ et $a = 5, b = 3, c = 4, e = 4/5$, les équations paramétriques sont:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & -3 & + & 5\cos(\alpha) \\ y & = & 2 & + & 3\sin(\alpha) \end{array} \right\}$$

Corrigé ex 52
Le centre est $C(3;-4)$ et $a=4, b=3, c=\sqrt{7}$, l'ellipse est debout. Le grand axe est $x=3$. L'équation cartésienne est:

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

Corrigé ex 53
a)

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$$

et $a=3, b=\sqrt{5}, c=2$.

b)

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

Corrigé ex 54
Il faut prouver que si P est un point de l'ellipse, la bissectrice des rayons focaux F_1P, F_2P est la normale à l'ellipse en P.
Plaçons un système d'axes de sorte que l'équation de l'ellipse soit sous la forme réduite. Alors les foyers ont les coordonnées $F_1(-c;0), F_2(c;0)$.
Un point P de l'ellipse admet les coordonnées paramétriques $P(a\cos(\gamma); b\sin(\gamma))$. Soit α_1, α_2 les angles entre la tangente et les rayons focaux.
La pente de la tangente est donnée par la pente du vecteur dérivé

$$pente\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\overrightarrow{OP}\right)=-\frac{b}{a}\cot(\gamma)$$

Les pentes des rayons focaux valent

$$-\frac{b\sin(\gamma)}{a\cos(\gamma)\pm c)}$$

La formule (5) et quelques calculs donnent:

$$\tan(\alpha_1)=\frac{b}{c\sin(\gamma)}$$

Par symétrie ($c\to -c$), on trouve

$$\tan(\alpha_2)=-\frac{b}{c\sin(\gamma)}$$

Ainsi les angles sont égaux au signe près.

Corrigé ex 55

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{(\pm a\cosh(\alpha))^2}{a^2}-\frac{(b\sinh(\alpha))^2}{b^2}=\cosh(\alpha)^2-\sinh(\alpha)^2=1$$

Corrigé ex 56
L'axe focal est la droite Ox. Le centre est $(0;0)$. Les hyperboles sont couchées.
a) $a=5, b=4$, les asymptotes sont $y=\pm\frac{4}{5}x$ et l'équation est

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$$

b) D'une part $c^2 = a^2 + b^2$, d'autre part $b/a = 4/3$, en résolvant le système on trouve $a = 6$ et $b = 8$ et l'équation est

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

Corrigé ex 57
En divisant par 144 on met l'équation sous forme réduite:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$a = 3, b = 4, c = 5, e = 5/3$, asymptotes $y = \pm\frac{4}{3}x$, axe transverse Ox, $F(\pm 5; 0), A(\pm 3; 0), B(0; \pm 4)$.
Les points $P(x; y)$ dont la distance au foyer $F(-5; 0)$ vaut 7 vérifient

$$\left\{ \begin{array}{c} PF^2 = (x+5)^2 + y^2 = 7^2 \\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \end{array} \right\}$$

On résout le système en éliminant y^2, on trouve les deux solutions $(-6; \pm 4\sqrt{3})$.

Corrigé ex 58
a)

$$\begin{array}{lcll}
16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 6y) - 161 & = & 0 & \Leftrightarrow \\
16(x^2 - 4x + 4 - 4) - 9(y^2 + 6y + 9 - 9) - 161 & = & 0 & \Leftrightarrow \\
16(x-2)^2 - 64 - 9(y+3)^2 + 81 - 161 & = & 0 & \Leftrightarrow \\
16(x-2)^2 - 9(y+3)^2 & = & 144 & \Leftrightarrow \\
\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} & = & 1 &
\end{array}$$

Il s'agit donc d'une hyperbole couchée de centre $C(2; -3)$, d'axe transverse $y = -3$ et $a = 3, b = 4, c = 5, e = 5/3$.
Les sommets sont $A_1(5; -3), A_2(-1; -3), B_1(2; 1), B_2(2; -7)$, les foyers sont $F_1(7; -3)$ et $F_2(-3; -3)$.
Les asymptotes passent par le centre et sont de pente $\pm 4/3$, donc leurs équations cartésiennes sont $y+3 = \pm\frac{4}{3}(x-2)$.
b)

$$\begin{array}{lcll}
9(x^2 + 2x) - 16(y^2 - 4y) + 89 & = & 0 & \Leftrightarrow \\
9(x^2 + 2x + 1 - 1) - 16(y^2 - 4y + 4 - 4) + 89 & = & 0 & \Leftrightarrow \\
9(x+1)^2 - 9 - 16(y-2)^2 + 64 + 89 & = & 0 & \Leftrightarrow \\
9(x+1)^2 - 16(y-2)^2 & = & -144 & \Leftrightarrow \\
-\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} & = & 1 &
\end{array}$$

Il s'agit donc d'une hyperbole debout de centre $C(-1; 2)$, d'axe transverse $x = -1$ et $a = 3, b = 4, c = 5, e = 5/3$.
Les sommets sont $A_1(-1; 5), A_2(-1; -1), B_1(3; 2), B_2(-5; 2)$, les foyers sont $F_1(-1; 7)$ et $F_2(-1; -3)$.
Les asymptotes passent par le centre et sont de pente $\pm 3/4$, donc leurs équations cartésiennes sont $y-2 = \pm\frac{3}{4}(x+1)$.

Corrigé ex 59
Il s'agit d'une hyperbole équilatère, on a $a^2/2 = 18$, donc $a = b = 6, c = 6\sqrt{2}, e = \sqrt{2}$, l'axe transverse est $y = x$, le centre est $(0; 0)$, les asymptotes sont Ox et Oy.

Corrigé ex 60

a) Première parabole: $p = 1$, *foyer* $F(1/2; 0)$ *et directrice* $x = -1/2$.
Seconde parabole: $p = 2$, *foyer* $F(1; 0)$ *et directrice* $x = -1$.
Troisième parabole: $p = 3$, *foyer F(3/2;0) et directrice* $x = -3/2$.
b) Première parabole: $p = 1$, *le foyer F(0;1/2) et directrice y = - 1/2.*
Seconde parabole: $p = 2$, *le foyer F(0;1) et directrice y = - 1.*
Troisième parabole: $p = 3$, *le foyer F(0;3/2) et directrice y = - 3/2.*

Corrigé ex 61

Soit $y^2 = 2px$ *l'équation standard d'une parabole, le foyer admet alors les coordonnées* $F(p/2; 0)$. *Soit* G *le point de la parabole situé sur la perpendiculaire à l'axe par* F. *Il faut prouver que* $FG = p$. G *admet pour ordonnée* y, *vérifiant* $y^2 = 2pp/2$, *donc* $y = p$.

Corrigé ex 62

a) L'axe focal est Ox, *le foyer ayant une abscisse négative, la parabole est tournée vers la gauche. Son équation est donc du type* $y^2 = -2px$, *comme* p *représente la distance du foyer à la directrice,* $p = 14$ *et* $y^2 = -28x$ *est l'équation cherchée.*

b) L'axe focal est parallèle à Oy, *le foyer ayant une ordonnée positive, la parabole est tournée vers le haut et décentrée. Son équation est donc du type* $(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta)$, *comme p représente la distance du foyer à la directrice,* $p = 12$.
Le sommet $S(\alpha; \beta)$ *est situé à mi-distance du foyer et de la directrice, donc* $S(2; -2)$ *et* $(x-2)^2 = 24(y+2)$ *est l'équation cherchée.*
Cette courbe est le graphe de la fonction $y = \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{11}{6}$.

Corrigé ex 63

a)

$$x^2 = 6y + 2 \Leftrightarrow x^2 = 6(y + 1/3)$$

Il s'agit d'une parabole debout de sommet $S(0; -1/3)$, *de paramètre* $p = 3$, *de foyer* $F(0; 7/6)$, *de directrice* $d : y = -11/6$ *et d'axe* Oy.
b)

$$y = 4x^2 - 8x + 7 \Leftrightarrow y = 4(x^2 - 2x) + 7 \Leftrightarrow y = 4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 7 \Leftrightarrow y = 4(x - 1)^2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$y - 3 = 4(x - 1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(y - 3) = (x - 1)^2$$

Le sommet est donc $S(1; 3)$, *l'axe* $x = 1$, *le paramètre* $p = 1/8$, *le foyer* $F(1; 49/16)$ *et la directrice* $d : y = 47/16$.

Corrigé ex 64

a) L'ellipse et la droite ne se coupent pas.
b) La parabole et la droite sont tangents au point $(4; -2)$.
c) L'hyperbole équilatère et la droite ne se coupent pas.
d) La parabole et la droite se coupent aux points $(p; 1)$ *et* $(1; 0)$.

Corrigé ex 65

a) En substituant y, *on trouve une équation du second degré en* x *qui admet deux solutions réelles si son discriminant* $\Delta(m) = 3m^2 - 5m + 1$ *est positif, c'est le cas si*

$$\frac{5 - \sqrt{13}}{6} < m < \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$$

b)

$$\frac{6 - \sqrt{101}}{13} < m < \frac{6 + \sqrt{101}}{13}$$

Corrigé ex 66

Tangentes $t_1 : y = -x + 6$ *de contact:* $T_1(2; 4)$ *et* $t_2 : y = -x - 4$ *de contact:* $T_2(-6; 2)$.

Corrigé ex 67

Tangentes	*Normales*
$y = \frac{3}{10}x + \frac{5}{2}$	$y = -\frac{10}{3}x - \frac{42}{5}$
$y = -\frac{5}{4}x - 4$	$y = \frac{4}{5}x + \frac{25}{4}$
$y = \frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$	$y = -3x - 21$