heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Mathématiques financières

Version 2012

Lang Fred

Table des matières

Time is Money
Un franc aujourd'hui n'est pas égal à un franc demain

1 Intérêts et taux

1.1 Définitions et notations

L'**intérêt** d'un **capital** se paie au début (**praenumerando**) ou à la fin (**postnumerando**) de la **durée** du prêt.

On note:

- n: durée du prêt
- i taux d'intérêt annuel
- C_n capital en l'an n
- C_0 capital initial

1.2 Intérêt simple

L'**intérêt simple** est calculé sur le **capital initial**, il est proportionnel au capital initial, il vaut $n\,i\,C_0$.
Le capital augmente à chaque période selon une progression arithmétique.

$$C_n = C_0(1 + n\,i)$$

Exemple 1
Quel est le capital rapporté (intérêts simples) en plaçant 40'000.- au taux 4,5% durant 10 ans?

Solution 1

$$C_{10} = C_0(1 + 10 \cdot 0.045) = 58'000.-$$

1.3 Intérêt composé

L'**intérêt composé** est calculé, à chaque période, sur le **capital final**.
Le capital augmente à chaque période selon une progression géométrique.

$$\boldsymbol{C_n = C_0(1+i)^n} \tag{1}$$

Exemple 2
Quel est le capital rapporté (intérêts composés) en plaçant 40'000.- au taux 4,5% durant 10 ans?

Solution 2

$$C_{10} = C_0(1 + 0.045)^{10} = 62'118.8$$

1.4 Taux proportionnel

On utilise les taux proportionnels $\boldsymbol{i_m}$ dans le cas des intérêts simples.
Si la période est une fraction $1/m$ d'année, par exemple, on a la relation suivante:

$$C_0(1 + m\, i_m) = C_0(1 + i)$$

D'où[1]

$$i_m = \frac{i}{m}$$

Exemple 3
Quel est le taux mensuel proportionnel pour un taux annuel de 8%?

Solution 3

$$i_{12} = 0.08/12 = 0.00666667$$

Exemple 4
Quel est le taux mensuel proportionnel pour un taux trimestriel de 2%?

Solution 4

$$i_3 = 0.02 \Rightarrow i = 4 \cdot 0.02 = 0.08 \Rightarrow i_{12} = 0.08/12 = 0.00666667$$

1.5 Taux équivalent

On utilise les **taux équivalents** $\boldsymbol{i_m}$ dans le cas des intérêts composés.
Si la période est une fraction d'année, par exemple, 1/2, 1/3, 1/4, 1/12, plus généralement $1/m$, on a les relations suivantes:

$$C_0(1 + i_m)^m = C_0(1 + i) = C_0(1 + i_n)^n$$

D'où[2]

$$i_m = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1 = \sqrt[m]{1 + i} - 1$$

et

$$i = (1 + i_m)^m - 1$$

Exemple 5
Quel est le taux mensuel équivalent pour un taux annuel de 8%?

Solution 5

$$i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0.08} - 1 = 0.00643403$$

Exemple 6
Quel est le taux trimestriel équivalent pour un taux mensuel de 1%?

[1] Ce taux est aussi noté $i_{1/m}$.
[2] Voir la note précédente.

Solution 6

$$i_{12} = 0.01 \Rightarrow i = 0.126825 \Rightarrow i_4 = 0.030301$$

1.6 Taux effectif et nominal

Ce taux permet d'afficher un taux inférieur à la réalité.

Exemple 7
Un prêt est soumis aux conditions suivantes:
Intérêt annuel de 12% payable par tranches mensuelles de 1%.

Solution 7
Le taux annuel **effectif** *est donné par la formule (1.5):*

$$i = (1 + 0,01)^{12} - 1 \approx 12,683\%$$

qui est supérieur au taux **nominal** *est* 12%*.*

1.7 Taux à francs constants

Selon la formule (1), un capital P placé à un taux i vaudra dans n années

$$F = P\,(1 + i)^n$$

Si on tient compte de l'inflation, sa valeur sera moindre, quel est alors le taux d'intérêt à francs constants?
Soit τ le taux d'inflation, la somme future n'est alors que de

$$F\,(1+\tau)^{-n} = P\,(1+i)^n\,(1+\tau)^{-n} = P\left(\frac{1+i}{1+\tau}\right)^n$$

Ainsi, le **taux à francs constants** est

$$\frac{1+i}{1+\tau}$$

2 Les capitaux

2.1 Introduction

On distingue deux notions: la **valeur actuelle** et la **valeur finale** ou **acquise** d'un capital.

La valeur finale C_n du capital C_0 est donnée par la formule (1).

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

L'opération est une **capitalisation**.

La valeur actuelle est le problème inverse, à combien se monte le capital initial C_0 pour obtenir un capital C_n ?
On obtient

$$C_0 = C_n \frac{1}{(1+i)^n}$$

L'opération est une d'**escompte**.

Exemple 8
A combien se monte le capital initial pour obtenir un capital de 100'000.- dans 10 ans au taux constant de 4%?

Solution 8

$$C_0 = C_{10} \frac{1}{(1+0.04)^{10}} = 67556.4$$

2.2 Facteurs de capitalisation et d'escompte

On introduit le **facteur de capitalisation**

$$\boldsymbol{r = 1 + i} \tag{2}$$

et le **facteur d'escompte**

$$\boldsymbol{v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{r}} \tag{3}$$

On peut réécrire les formules de capitalisation et d'escompte

$$\boldsymbol{C_n = C_0\, r^n} \tag{4}$$

et

$$\boldsymbol{C_0 = C_n\, v^n} \tag{5}$$

Les règles de calcul des puissances trouvent ici une nouvelle interprétation.

Exemple 9
Capitaliser C_0 sur 7 ans en deux opérations successives, sur 3 ans, puis de nouveau sur 4 ans.

Solution 9

$$C_7 = C_0\, r^3\, r^4$$

$$C_0 = C_7\, v^3\, v^4$$

Exemple 10
On souhaite placer une somme C sur un compte à 3% et vider celui-ci en deux fois, 2000.- dans 3 ans et 3000.- dans 5 ans. Quelle est la valeur de C ?

Solution 10

$$C = 2000\, v^3 + 3000\, v^5$$

On escompte 2000.- sur 3 ans et 3000.- sur 5 ans.

$$C = (2000 + 3000\, v^2)v^3$$

s'interprète comme un escompte de 3000.- sur 2 ans, dont on ajoute 2000.-, en escomptant le tout sur 3 ans.

Finalement

$$C = (2000\, r^2 + 3000)v^5$$

s'interprète comme une capitalisation de 2000.- sur 2 ans, dont on ajoute 3000.-, en escomptant le tout sur 5 ans.

3 Les rentes

3.1 Introduction

Une **rente** ou **annuité** est une suite de paiements versés périodiquement à intervalles de temps réguliers et durant une période fixée à l'avance.

Si la rente est payable, en fin de période, elle est dite **postnumerando**.
Si la rente est payable, en début de période, elle est dite **praenumerando**.

On peut demander la **valeur finale** ou la **valeur actuelle** d'une rente, payée praenumerando ou postnumerando.

Exemple 11
Quelle sera la valeur finale d'une rente de 1000.- sur un compte épargne à 5% dans trois ans ?

Solution 11
Elle est donnée par

$$1000r + 1000r^2 + 1000r^3 = 1000r(1 + r + r^2) \approx 3310.13$$

Sa valeur actuelle est

$$1000v + 1000v^2 + 1000v^3 = 1000v(1 + v + v^2) \approx 2723.25$$

Comme on le constate, nous avons besoin de la somme des termes d'une progression géométrique:

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1 - t^n}{1 - t} \tag{6}$$

Le taux i est un taux d'intérêt postnumerando, il est possible de définir au taux praenumerando:

$$d = iv = 1 - v = \frac{i}{1 + i}$$

On définit

Rente payable	Valeur actuelle	Valeur finale
postnumerando	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$
praenumerando	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\rceil}$

Table 1: Rentes

3.2 Représentations graphiques

3.2.1 Rentes postnumerando

Table 2: Rentes postnumerando, $n = 4$

versements \ années	1	2	3	4	
1	V →				$V\,r^3 +$
2		V →			$V\,r^2 +$
3			V →		$V\,r +$
4				V →	V

↑ ↑ $=$

$$V(v + v^2 + v^3 + v^4) = V\,a_{\overline{4}|} \qquad V\,s_{\overline{4}|} = V(1 + r + r^2 + r^3)$$

- ***Le premier versement V est versé à la fin de l'année 1, il capitalise durant $n-1$ ans.***
- ***Le dernier versement V est versé à la fin de l'année n, il ne capitalise pas.***
- ***La capitalisation $s_{\overline{n}|}$ se fait à la fin de l'année du dernier versement.***
- ***L'actualisation $a_{\overline{n}|}$ se fait au début de l'année du premier versement.***

3.2.2 Rentes praenumerando

Table 3: Rentes praenumerando, $n = 4$

versements \ années	1	2	3	4	
1	←V				$V\,r^4 +$
2		←V			$V\,r^3 +$
3			←V		$V\,r^2 +$
4				←V	V

↑ ↑ $=$

$$V(1 + v + v^2 + v^3) = V\,\ddot{a}_{\overline{4}|} \qquad V\,\ddot{s}_{\overline{4}|} = V(r + r^2 + r^3 + r^4)$$

- ***Le premier versement V est versé au début de l'année 1, il capitalise durant n ans.***
- ***Le dernier versement V est versé au début de l'année n, il capitalise un an.***

- ***La capitalisation $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ se fait à la fin de l'année du dernier versement.***
- ***L'actualisation $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ se fait au début de l'année du premier versement.***

3.3 Formules

- $a_{\overline{n}|}$: valeur actuelle d'une rente de 1.- payable postnumerando pour une durée de n années.

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + ... + v^{n-1} + v^n = \sum_{k=1}^{n} v^k = \frac{1 - v^n}{i} \tag{7}$$

- $s_{\overline{n}|}$: valeur finale d'une rente de 1.- payable postnumerando pour une durée de n années.

$$s_{\overline{n}|} = 1 + r + r^2 + ... + r^{n-2} + r^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{r^n - 1}{i} \tag{8}$$

- $\ddot{a}_{\overline{n}|}$: valeur actuelle d'une rente de 1.- payable praenumerando pour une durée de n années.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + ... + v^{n-2} + v^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = \frac{1 - v^n}{d} \tag{9}$$

- $\ddot{s}_{\overline{n}|}$: valeur finale d'une rente de 1.- payable praenumerando pour une durée de n années.

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r + r^2 + ... + r^{n-1} + r^n = \sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r^n - 1}{d} \tag{10}$$

La valeur de la rente elle-même est obtenue en multipliant le versement par les coefficients ci-dessus.

Une rente perpétuelle correspond à une durée infinie.

- $$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} v^k = \frac{1}{i} \tag{11}$$
- $$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} v^k = \frac{1}{d} \tag{12}$$

Exemple 12
Calculer la valeur actuelle d'une rente postnumerando de 4000.- à 5% sur 10 ans ?

Solution 12
On calcule

$$a_{\overline{10|}} = 7.72173 \Rightarrow 4000 \cdot 7.72173 = 30886.90$$

Cette valeur correspond au capital qu'il faudrait mettre sur un carnet d'épargne à à 5% afin de pouvoir vider le compte pendant 10 ans à raison de retraits annuels de 4000.-.

Exemple 13
Calculer la valeur finale d'une rente postnumerando de 4000.- à 5% sur 10 ans ?

Solution 13
Réponse:

$$50311.60$$

Cela représente le capital acquis au bout de 10 ans.
En escomptant cette somme sur 10 ans, on retrouve la valeur actuelle:

$$50311.60 \cdot v^{10} = 30886.90$$

Exemple 14
Calculer la valeur actuelle d'une rente praenumerando de 4000.- à 5% sur 10 ans ?

Solution 14
Réponse:

$$32431.30$$

Exemple 15
Calculer la valeur finale d'une rente praenumerando de 4000.- à 5% sur 10 ans ?

Solution 15
Réponse

$$52827.10$$

Cela représente la valeur finale acquise au bout de 10 ans d'un carnet d'épargne avec un premier versement immédiat.
En escomptant cette somme sur 10 ans, on retrouve la valeur actuelle:

$$52827.10 \cdot v^{10} = 32431.30$$

3.4 Relations

Table 4: Liens entre le prae et le post-numerando

$a_{\overline{n}|}$ $\downarrow$ $\qquad \cdot v \leftarrow \qquad$ $s_{\overline{n}|}$ $\downarrow$

versements \ années	1	2	3	4	5	6	
1	V $\rightarrow$						
2		V $\rightarrow$					
3			V $\rightarrow$				
4				V $\rightarrow$			
5					V $\rightarrow$		
6						V $\rightarrow$	

$\uparrow$ $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ $\qquad \cdot r \rightarrow \qquad$ $\uparrow$ $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

Le tableau (4) permet de comprendre les relations suivantes:

$a_{\overline{n}|} = v \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$	$s_{\overline{n}|} = v \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|}$
$\ddot{a}_{\overline{n}|} = r \cdot a_{\overline{n}|}$	$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r \cdot s_{\overline{n}|}$
$a_{\overline{n}|} = v^n \cdot s_{\overline{n}|}$	$s_{\overline{n}|} = r^n \cdot a_{\overline{n}|}$
$\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|}$	$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r^n \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$
$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1$	$s_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{n-1}|} + 1$

Table 5: Relations

4 Les emprunts

4.1 Définitions et notations

Les paiements effectués dans le cadre d'un emprunt sont appelés **annuités**.
L'annuité comprend un **amortissement** (remboursement du capital) et un **intérêt**.

annuité = amortissement + intérêts

Notations:

- i: Taux d'intérêt annuel de l'emprunt
- C: Capital emprunté
- n: Durée de l'emprunt en année
- C_k: Etat de la dette en **début d'année** k.
- R_k: Remboursement (amortissement) effectué en **fin d'année** k.
- I_k: Intérêt payé en **fin d'année** k.
- S_k: Amortissements cumulés en **fin d'année** k.
- A_k: Annuité payée en **fin d'année** k.

4.2 Emprunts à amortissement constant

Formule	récurrence	directe
$C_k =$	$C_{k-1} - R_{k-1}$	$= (n-k+1)\,\frac{C}{n} = C - \frac{k-1}{n}\,C$
$R_k =$	$A_k - I_k$	$= \frac{C}{n} = R$
$S_k =$	$S_{k-1} + R_{k-1} = k\,R_k$	$= kR = k\,\frac{C}{n}$
$I_k =$	$i\,C_k$	$= i(n-k+1)\,\frac{C}{n}$
$A_k =$	$R_k + I_k = \frac{C}{n} + i\,C_k$	$= \frac{C}{n}(1 + i(n-k+1))$

Table 6: *Le montant annuel remboursé est constant*

Exemple

Période	Etat de la dette	Amortissement	Amortissement cumulé	Intérêt	Annuité
k	C_k	R_k	S_k	I_k	A_k
1	1000	**250**	250	100	350
2	750	**250**	500	75	325
3	500	**250**	750	50	300
4	250	**250**	1000	25	275

Table 7: Emprunt de 1000.- à 10% l'an remboursable en 4 ans par amortissement constant.

4.3 Emprunts à annuité constante

Formule	récurrence	directe
$C_k =$	$C_{k-1} - R_{k-1} = A\, a_{\overline{n-k+1}\rceil}$	$= C\,\frac{1-v^{n-k+1}}{1-v^n}$
$R_k =$	$A_k - I_k = A - i\,C_k$	$= C\,i\,\frac{v^{n-k+1}}{1-v^n}$
$S_k =$	$S_{k-1} + R_{k-1} = A(a_{\overline{n}\rceil} - a_{\overline{n-k}\rceil})$	$= C\,\frac{v^{n-k}-v^n}{1-v^n}$
$I_k =$	$i\,C_k = iA\,a_{\overline{n-k+1}\rceil}$	$= C\,i\,\frac{1-v^{n-k+1}}{1-v^n}$
$A_k =$	$R_k + I_k$	$= \frac{C}{a_{\overline{n}\rceil}} = C\,\frac{i}{1-v^n} = A$

Table 8: *L'annuité est constante*

La dernière formule se comprend si on pense à une rente de A pendant n ans, C étant sa valeur actuelle.

Exemple

Période	Etat de la dette	Amortissement	Amortissement cumulé	Intérêt	Annuité
k	C_k	R_k	S_k	I_k	A_k
1	1000	215	215	100	**315**
2	785	237	452	78	**315**
3	548	261	713	55	**315**
4	287	287	1000	29	**315**

Table 9: Emprunt de 1000.- à 10% l'an remboursable en 4 ans par annuité constante.

5 Bibliographie

- Philippe Chuard. Mathématiques financières.
- Louis Esch. Mathématique pour économistes et gestionnaires.
- Favre. Mathématiques financières et actuarielles.