heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Combinatoire, probabilités et statistiques

Version 2006

Lang Fred

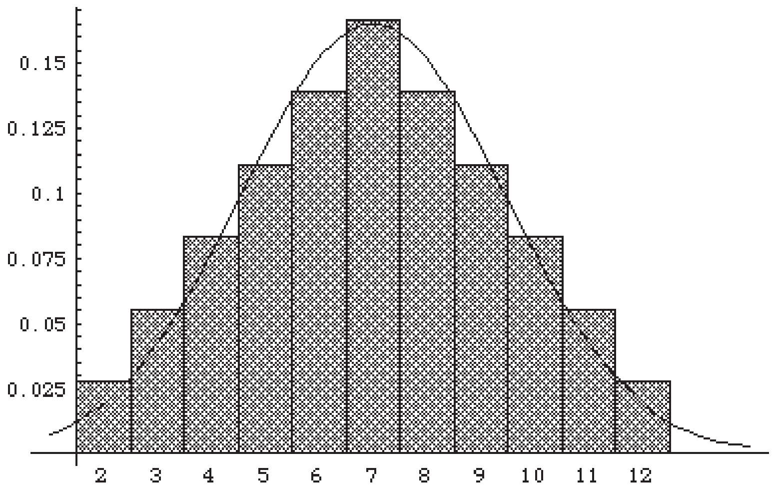

Table des matières

1 Factorielles et coefficients binômiaux

1.1 Définitions

Pour $n > 0$, $\boldsymbol{n}$ **factorielle**, noté $\boldsymbol{n!}$ désigne le produit des n premiers nombres naturels:

$$\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} \tag{1}$$

On étend cette définition en posant:

$$\boldsymbol{0! = 1} \tag{2}$$

Soient k et n des nombres entiers positifs vérifiant $0 \leq k \leq n$.

On appelle **coefficient binomial** le nombre $\boldsymbol{C_k^n}$ défini par la formule directe:

$$\boldsymbol{C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \tag{3}$$

Exemple 1

$$C_3^7 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

1.2 Propriétés des coefficients binomiaux

Valeur initiale:

$$C_0^0 = 1$$

Formule de récurrence:

$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1} \tag{4}$$

Ces deux formules permettent de calculer de proche en proche les coefficients binômiaux, elles se programment très facilement au tableur ou dans un langage de programmation.

Exemple 2

$$C_4^{10} + C_3^{10} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot (7+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = C_4^{11}$$

En plaçant les valeurs des coefficients binomiaux dans un tableau de forme triangulaire, on obtient le **triangle de Pascal**:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	C_0^0				
1	C_0^1	C_1^1			
2	C_0^2	C_1^2	C_2^2		
3	C_0^3	C_1^3	C_2^3	C_3^3	
4	C_0^4	C_1^4	C_2^4	C_3^4	C_4^4

Table 1: Triangle de Pascal des coefficients binômiaux

Chaque élément est la somme de ceux situés au-dessus et au-dessus à gauche de lui-même, conformément à la formule de récurrence.
On peut observer la symétrie:

$$C_k^n = C_{n-k}^n \tag{5}$$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Table 2: Triangle de Pascal

Exemple 3

$$C_5^8 = C_3^8 = 56$$

On a les valeurs particulières:

$$C_0^n = C_n^n = 1 \tag{6}$$

$$C_1^n = C_{n-1}^n = n \tag{7}$$

$$C_2^n = C_{n-2}^n = \frac{n(n-1)}{2} \tag{8}$$

1.3 Binôme de Newton

Lorsque n est un nombre naturel, on a la formule du binôme:

$$\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^n \; a^{n-k} \; b^k} \tag{9}$$

Exemple 4
Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = a + b$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

La preuve se fait par récurrence, nous donnerons un argument convaincant au chapitre suivant.

Exemple 5
Voici un exemple numérique:

$$(1+x)^8 = 1 + 8x + 28x^2 + 56x^3 + 70x^4 + 56x^5 + 28x^6 + 8x^7 + x^8$$

Le polynôme obtenu est homogène et du cinquième degré par rapport à a et b.

On démontre aussi que

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + ... + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$$

1.4 Exercices

Exercice 1

Simplifier et calculer les nombres suivants: *a)* $\frac{8!}{11!}$ *b)* $\frac{5! - 8!}{4! - 7!}$ *c)* $\frac{5!6!}{4!7!}$

Exercice 2

Trouver les développements de *a)* $(a - 2x)^7$ *b)* $(x + 2y)^5$

Trouver le 5^{eme} *terme de* *c)* $(x^3 + 2)^{17}$

2 Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire s'occupe de dénombrements. Elle a des applications en calcul des probabilités.
De nombreux problèmes de dénombrement se ramènent au nombre de manières de ranger k objets choisis parmi n.
Avant tout dénombrement, il faut s'assurer si, dans la manière de ranger les objets, l'ordre compte ou non, si certains objets sont répétés ou non, si tous les objets sont pris ou non.
Selon les cas, la manière de compter change complètement.
Ainsi, on appelera:
- **groupement sans répétition**, le rangement qui ne renferme que des objets distincts.
- **groupement avec répétition** celui qui contient plusieurs objets indistinguables.

et selon que l'ordre compte ou non, on aura affaire à:
- des **arrangements** ou des **permutations** si l'ordre compte
- des **combinaisons** si l'ordre ne compte pas.

Dans les problèmes de dénombrement, on a recours aux deux principes fondamentaux suivants:

Le principe de multiplication:
Si une expérience peut se décomposer en k opérations successives qui peuvent s'effectuer de $n_1, n_2, ..., n_k$ manières distinctes, alors l'expérience peut se faire de

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$$

manières différentes.

Exemple 6
Les localités A et B sont reliées par $n_1 = 3$ routes différentes et les localités B et C par $n_2 = 2$ routes différentes; alors il y a $N = 3 \times 2 = 6$ manières différentes de se rendre par la route de la localité A à la localité C.

Exemple 7
Le nombre de plaques comportant une lettre dans $\{a, b, c, d, e\}$ et un nombre entre 1 et 4 vaut

$$n_1 = 5, n_2 = 4, N = n_1 n_2 = 20$$

Voir Table 3.

	a	b	c	d	e
1	a1	b1	c1	d1	e1
2	a2	b2	c2	d2	e2
3	a3	b3	c3	d3	e3
4	a4	b4	c4	d4	e4

Table 3: Exemple 7

Le principe d'addition:
Si une expérience A peut être réalisée de n façons distinctes et si une expérience B peut être réalisée de m manières différentes, les deux expériences ne pouvant être réalisées simultanément, alors il y a:

$$N = n + m$$

façons distinctes de réaliser A ou B.
Si les deux expériences peuvent être réalisées simultanément, alors la formule devient:

$$N = n + m - p$$

où p est le nombre de réalisations communes.

2.1 Arrangements et permutations simples

Une **permutation simple** est un arrangement de n objets, tous distincts, pris dans un ordre donné; leur nombre est

$$\boldsymbol{P_n = n!} \tag{10}$$

Le rangement ordonné de r objets distincts choisis parmi $n \geq r$, s'appelle **arrangement simple** et leur nombre se note

$$\boldsymbol{A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}} \tag{11}$$

Remarque
Si $n = r$ alors $A_r^n = P_n$.

Exemple 8
Soient les 4 lettres a, b, c et d. Alors:
- $abcd, bcda, acdb$ sont des permutations simples des 4 lettres.
- bd, cb, ca sont des arrangements simples de 2 lettres choisies parmi 4.

Il y a $P_4 = 4! = 24$ permutations des 4 lettres et $A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ choix ordonnés sans répétitions de 2 lettres parmi 4.

La formule précédente se justifie aisément:
Il y a n façons de choisir le premier objet, le deuxième objet doit être choisi parmi les $n-1$ restants, le troisième objet doit être choisi parmi les $n-2$ restants, etc... Ainsi, en vertu du principe de multiplication, on a:

$$A_r^n = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemple 9
- Le nombre d'arrangements de 3 lettres choisies parmi 6 est $A_3^6 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.
- Le nombre de permutations de 6 lettres est égal à $P_6 = 6! = 720$.

Exemple 10 (Comités)
Le nombre de comités (président, secrétaire, caissier) de 3 membres que l'on peut former à partir de 8 personnes est égal à

$$A_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

2.2 Arrangements avec répétition

Le nombre d'arrangements avec répétition de r objets choisis parmi n, est:

$$A'^n_r = n^r \tag{12}$$

En effet, il y a n choix pour le premier objet, n choix pour le second, etc..

2.3 Combinaisons simples

Une **combinaison simple** de r objets, tous distincts, choisis parmi n est un sous-ensemble quelconque de r éléments choisis parmi n; on ne tient donc pas compte de l'ordre dans lequel se trouvent ces éléments; le nombre de combinaisons simples est

$$\boldsymbol{C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}} \tag{13}$$

La justification de cette formule est aisée, en effet, ayant une combinaison de r objets, il y a $r!$ manières de les ordonner. Donc

$$r! \cdot C_r^n = A_r^n$$

Exemple 11 (Délégations)
Le nombre de délégations de 3 *membres que l'on peut former à partir de* 8 *personnes est égal à*

$$C_3^8 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

Remarquons qu'une délégation peut former $3! = 6$ *comités (élection indirecte).*
Et ainsi, le nombre de comités est $56 \cdot 6 = 336$.

Exemple 12 (Le binôme de Newton)
Nous pouvons maintenant justifier la formule (9) du binôme par un exemple:

$$(a+b)^8 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Le nombre de termes du type, par exemple, a^5b^3 *sera donné par le nombre de produits du type* $aaaaabbb, aaaababb, abababaaa$*, etc..., donc par le nombre de mots de* 8 *lettres formés de* 5 *"a" et* 3 *"b". Il y en a autant qu'il y a de manières de choisir les* 5 *positions occupées par les "a". Le nombre de manière de choisir* 5 *positions parmi* 8 *est* C_5^8.

2.4 Combinaisons avec répétitions

Un tel type de combinaison se ramène à un choix non ordonné ou un élément peut apparaître plusieurs fois. Le nombre de combinaisons de r objets choisis parmi n, le même objet pouvant être répété, est

$$C'^n_r = C_r^{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} \tag{14}$$

Dans ce cas, le nombre d'objets choisis peut très bien être plus grand que n, il n'y a pas de limite pour r.

Exemple 13
Le nombre de groupes de 3 *lettres, avec répétition, que l'on peut former avec les* 4 *lettres* a, b, c *et* d *est:*

$$C'^4_3 = C_3^6 = 20$$

Ce sont:

$$aaa, aab, aac, aad, abb, abc, abd, acc, acd, add, bbb, bbc, bbd, bcc, bcd, bdd, ccc, ccd, cdd, ddd$$

La justification est plus délicate, nous l'illustrerons par un exemple:

Exemple 14
Le nombre de groupes de 9 lettres, avec répétition, que l'on peut former avec les 3 lettres a, b, c est:

$$C'^{3}_{9} = C^{11}_{9}$$

Par exemple:

$$aaabbbbcc$$

Voyons comment on peut construire un tel groupe.
Représentons une quelconque des r lettres choisies par une croix x et donnons nous $n-1$ barres verticales de séparation $|$:
Représentons le groupe ci-dessus par $xxx|xxxx|xx$.
Cette méthode permet de représenter tous les groupes possibles, voir le tableau 4.

$\|\|xxxxxxxxx$	représente	$ccccccccc$
$xxxxxxxxx\|\|$	représente	$aaaaaaaaa$
$\|xxxxxxxxx\|$	représente	$bbbbbbbbb$
$x\|xxxx\|xxxx$	représente	$abbbbcccc$

Table 4: Exemples de groupes

Ainsi, le nombre de groupes est le nombre de manières de placer les $n-1$ séparateurs parmi les $r+n-1$ places possibles, c'est-à-dire

$$C^{n+r-1}_{n-1} = C^{n+r-1}_{r}$$

2.5 Exercices

Exercice 3
Calculer ou simplifier:

1. $3!$
2. $\dfrac{13!}{11!}$
3. $\dfrac{7!}{10!}$
4. $\dfrac{n!}{(n-1)!}$
5. $\dfrac{(n+2)!}{n!}$
6. $\dfrac{(n-1)!}{(n+2)!}$
7. $\dfrac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$
8. $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n-1)!}$

Exercice 4
Une plaque d'immatriculation contient deux lettres distinctes suivies de 3 chiffres dont le premier est différent de 0. Combien de plaques différentes peut-on fabriquer ?

Exercice 5
De combien de façons différentes peut-on répartir un groupe de 7 personnes:
a) sur une rangée de 7 chaises ?
b) autour d'une table ronde ?

Exercice 6
De combien de façons différentes 3 garçons et 2 filles peuvent-ils prendre place sur un banc?
1) On suppose les garçons indiscernables entre eux, de même pour les filles.
2) On suppose les garçons discernables entre eux, de même pour les filles.
Idem, mais avec la condition que les filles doivent être l'une à côté de l'autre ?

Exercice 7
Combien de permutations distinctes peut-on former avec toutes les lettres des mots:
a) leur *b) anabase* *c) sociologique?*

Exercice 8
En supposant que les personnes de même nationalité s'assoient les unes à côté des autres, de combien de façons différentes 3 Américains, 4 Français, 4 Danois et 2 Italiens peuvent-ils prendre place sur un banc ?
- On suppose les personnes de même nationalité indiscernables entre elles.
- On suppose les personnes de même nationalité discernables entre elles.

Exercice 9
De combien de manières peut-on former un jury de 3 hommes et 2 femmes si l'on dispose de 7 hommes et de 5 femmes ?

Exercice 10
A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur 10.
a) Combien de choix y-a-t-il ?
b) Combien de choix a-t-il s'il doit répondre aux trois premières questions ?
c) Combien de choix a-t-il s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?

Exercice 11
Calculer le nombre de sous-ensembles d'un ensemble comprenant n éléments.

Exercice 12
Montrer que l'on a:

$$C_r^{n+1} = C_{r-1}^n + C_r^n$$

Exercice 13
De combien de manières peut-on offrir 7 jouets à 3 enfants du même âge, dont un reçoit 3 jouets et chacun des autres 2 jouets?

Exercice 14
De combien de manières différentes peut-on répartir 12 élèves en 3 classes de telle sorte que chaque classe contienne 4 élèves ?

3 Evénements-probabilités

3.1 Univers-événements

Une expérience aléatoire ou stochastique est une expérience dont il n'est pas possible de prévoir le résultat (l'issue); on suppose qu'elle peut être répétée indéfiniment dans les mêmes conditions.

Exemples

- Jeter un dé.
- Mesurer la durée de vie d'un appareil.
- Enregistrer un signal transmis en présence d'un bruit de fond.

Un résultat ou **issue** d'une expérience sera notée ω; l'ensemble de tous les résultats (issues) possibles d'une expérience est appelé **ensemble fondamental** ou **univers des possibles** et sera noté Ω. Cet ensemble peut être fini, dénombrable ou non dénombrable.

Exemples

- $\{a, b, c, d\}$ est un ensemble fini.
- $\mathbb{Z}$ est un ensemble dénombrable.
- $[2; 3]$, $\mathbb{R}$ sont des ensembles non dénombrables.

La détermination de l'ensemble fondamental dépend de ce que l'on cherche à établir:

Exemples

- On jette un dé et on désire calculer la probabilité que le chiffre 5 sorte; alors l'univers est:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- On jette le même dé et on veut calculer la probabilité qu'un nombre pair sorte; dans ce cas, on peut choisir :

$$\Omega = \{i, p\}$$

  où i est pour impair et p pour pair.

- On jette une pièce de monnaie et on s'intéresse au nombre de fois qu'il faut lancer la pièce pour obtenir 8 fois "face"; dans ce cas, on a:

$$\Omega = \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

- On casse un bâton de longueur l et on s'intéresse à la longueur de l'un des bouts obtenus; dans ce cas, on a l'univers

$$\Omega = [0, l]$$

- La durée de vie d'un appareil donne l'univers

$$\Omega = \mathbb{R}_+$$

Un ensemble A d'issues possibles d'une expérience est un **événement**, c'est un sous-ensemble de l'univers, $A \subset \Omega$; s'il ne contient qu'un seul résultat $\{\omega\}$, on parle d'un **événement élémentaire**.

Exemples

- Lancer du dé: $A = \{3\}$ est un événement élémentaire, $B = \{2, 4, 6\}$ est l'événement "il sort un nombre pair".
- Durée de vie d'un appareil: $E =$ "L'appareil fonctionne plus de 100 heures" $= [100, \infty)$.

Un événement A est dit réalisé si le résultat de l'expérience appartient à cet ensemble; c'est pourquoi on dit que:

Ω est l'**événement certain** et $\emptyset$ est l'**événement impossible**.

Un univers comprenant n éléments a 2^n sous-ensembles, il y a 2^n événements possibles.

3.2 Opérations sur les événements

Une des difficultés rencontrée en calcul des probabilités est de traduire correctement en langage ensembliste les événements dont on désire calculer la probabilité; on prendra soin de noter par:

Union des ensembles $A \cup B$: l'événement "l'un au moins des événements A **ou** B est réalisé".

Intersection des ensembles $A \cap B$: l'événement "les événements A **et** B sont réalisés".

Ensemble complémentaire $\neg A$, $-A$ ou encore $\overline{A}$ l'événement **contraire** de l'événement A.

Deux événements A et B sont dits **incompatibles** ou **exclusifs** s'ils ne peuvent être réalisés simultanément, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple
Au lancer du dé, on considère les événements:

- A : "il sort un nombre pair".
- B : "il sort un nombre supérieur à 3".

Alors:

- $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ est l'événement "il sort un nombre pair ou supérieur à 3".
- $A \cap B = \{4, 6\}$ est l'événement "il sort un nombre pair et supérieur à 3".
- $\neg A = \{1, 3, 5\}$ est l'événement "il sort un nombre impair".

Lois de Morgan

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{15}$$

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{16}$$

Lois de distributivité

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{17}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{18}$$

3.3 Expériences composées

Parfois, une expérience aléatoire peut être décomposée en deux ou plus expériences partielles.

Exemple
Si on lance un dé rouge et un dé noir, il est naturel de considérer l'issue du lancer comme étant un couple (i, j), ordonné, où i représente le résultat du dé rouge et j celui du dé noir.
L'univers associé à cette expérience est

$$\Omega = \{(i, j),\ 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$$

L'événement "le dé rouge donne un nombre pair et le noir un nombre inférieur à 3" est

$$A = \{(2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 2), (6, 1), (6, 2)\}$$

Une autre présentation est le diagramme en arbre, voir la figure 1.

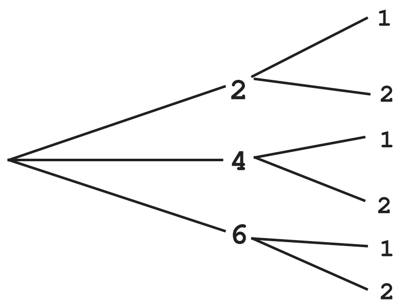

Figure 1: Diagramme en arbre

3.4 Probabilité: Définition

Si l'univers des issues possibles est fini et qu'on peut supposer que toutes les issues soient **équiprobables** (aucune issue n'est privilégiée), alors la probabilité que l'événement A se réalise est donnée par le rapport:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\textbf{Nombre de cas favorables}}{\textbf{Nombre de cas possibles}}} \tag{19}$$

Le calcul d'une probabilité se ramène alors à des dénombrements.

Exemple
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair en jetant un dé? On suppose que le dé est parfaitement équilibré, donc que les issues sont équiprobables.
Comme il y a 6 issues, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on leur attribue à chacune la probabilité 1/6.
Soit l'événement A: "obtenir un nombre pair".
Alors $A = \{2, 4, 6\}$ et $P(A) = \frac{3}{6}$.

Exemple
On cherche la probabilité p que 25 personnes aient des jours de naissance distincts.
Dans ce problème, il y a lieu de supposer l'équiprobabilité des jours de naissance: aucun jour n'étant préféré à un autre pour naître.
Une issue est ici un 25-uple où chaque composante est choisie dans l'ensemble $\{1, 2, ..., 365\}$;

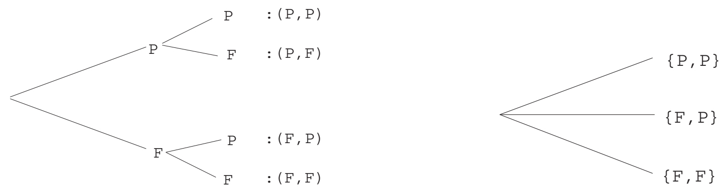

Figure 2: Deux univers possibles, l'un équiprobable, l'autre non

Donc
$$N(\Omega) = A'^{365}_{25}$$
L'événement dont on cherche la probabilité, A: "25 jours de naissance distincts", est formé de
$$N(A) = A^{365}_{25} = 365 \cdot 364 \cdot ... \cdot 341$$
issues.
Ainsi, la probabilité cherchée est $\frac{N(A)}{N(\Omega)} \approx 0.43$, si on ignore les années bissextiles.

Exemple
Quelle est la probabilité d'obtenir deux côtés distincts en jetant deux pièces de monnaie?
On suppose que la pièce est parfaitement équilibrée, donc que chaque côté a une chance sur deux d'apparaître lors d'un lancer.
Posons $F =$ "Face" et $P =$ "Pile", $P(F) = P(P) = \frac{1}{2}$.
Il y a deux manières de décrire l'univers des possibles:

- On tient compte de l'ordre d'arrivée des pièces (jets successifs), l'univers des possibles est formé de **couples**:
$$\Omega_1 = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$$
- On n'en tient pas compte (jets simultanés), l'univers des possibles est formé de **paires**:
$$\Omega_2 = \{\{P,P\},\{P,F\},\{F,F\}\}$$

Du point de vue "physique", le résultat doit être le même, la parfaite simultanéité n'existant pas. On ne peut donc avoir affaire dans les deux descriptions à des univers équiprobables.
La figure 2 donne une description en arbre des deux univers.
Chaque chemin représente une issue. Les hypothèses faites sur la pièce nous conduisent à donner une même probabilité aux 4 chemins de l'univers Ω_1, par contre on ne peut rien dire a priori des probabilités des chemins de l'univers Ω_2.
Ainsi
$$P(PP) = P(PF) = P(FP) = P(FF) = \frac{1}{4}$$
Soit A l'événement "obtenir deux faces distinctes".
$$P(A) = P\{(P,F),(F,P)\} = \frac{1}{2}$$
Dans l'univers Ω_2, les probabilités des issues sont donc:
$$P\{P,P\} = \frac{1}{4},\ P\{P,F\} = \frac{1}{2},\ P\{F,F\} = \frac{1}{4}$$
Très souvent, on ne peut pas faire l'hypothèse d'équiprobabilité, on détermine alors la probabilité d'un événement en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

Lorsqu'on répète N fois l'expérience aléatoire, l'événement A se produit $N(A)$ fois;
$f(A) = \dfrac{N(A)}{N}$ est la **fréquence relative** de A (en N expériences).

Lorsque N augmente, la fréquence relative $f(A)$ se stabilise, on pose alors :

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} f(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N}$$

Exemple
N appareils identiques sont mis en service simultanément. Après un temps T, on constate que n de ces appareils sont en panne.
La probabilité de l'événement A:"un appareil tombe en panne après un temps T" sera $P(A) = \dfrac{n}{N}$.

3.5 Probabilité: propriétés

Une loi de probabilité P(X) doit vérifier les axiomes suivants:

$$\begin{array}{rc}
1) & 0 \leq P(A) \leq 1 \\
2) & P(\Omega) = 1 \\
3) & P(\emptyset) = 0 \\
4) & P(\overline{A}) = 1 - P(A) \\
5) & A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B) \\
6) & P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset \\
7) & P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{array} \tag{20}$$

Commentaires
1) La probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1.
2) La probabilité de l'événement certain est égale à 1.
3) La probabilité de l'événement impossible est égale à 0.
4) La probabilité de l'événement contraire est égale à 1 moins la probabilité de l'événement.
5) La probabilité de deux événements incompatibles est égale à la somme des probabilités de chaque événement.
6) La probabilité de deux événements est égale à la somme des probabilités de chaque événement moins la probabilité de leur réalisation commune.

Ces formules se généralisent à plusieurs événements $A, B, C, ...$

Exemple
Jet de deux dés distincts.
On considère les événements
A: "Un dé au moins donne 1".
B: "Un dé au moins donne 6".
C: "La somme des points est ≥ 10".
On obtient

$$P(A) = P(B) = \frac{11}{36},\ P(C) = \frac{1}{6}$$

Ainsi:
1) A et C sont incompatibles

$$P(A \cup C) = \frac{17}{36} = P(A) + P(C)$$

2) B et C ne sont pas incompatibles

$$P(B \cup C) = \frac{12}{36} \neq P(B) + P(C)$$

Exemple
Un certain type de voiture présente parfois deux vices de fabrication; on sait que 7% de ces voitures ont le premier défaut, 11% le deuxième défaut et 2% ont les deux défauts;
on se propose de calculer la probabilité qu'une voiture de ce type soit exempte de défauts.
On considère les événements:
A: "La voiture a le premier défaut".
B: "La voiture a le deuxième défaut".
Alors, la donnée implique que:

$$P(A) = 0.07, P(B) = 0.11 \text{ et } P(A \cap B) = 0.02$$

L'événement dont on cherche la probabilité étant $\overline{A} \cap \overline{B}$, on a alors:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - (0.07 + 0.11 - 0.02) = 0.84$$

3.6 Probabilité conditionnelle

La probabilité d'un événement peut changer, si on obtient des informations le concernant.
Un exemple permettra de justifier la définition qui suivra.
On tire au hasard, sans la regarder, une carte d'un jeu ordinaire de 52 cartes.
On s'intéresse à l'événement A: "la carte tirée est un valet".

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Supposons, qu'après avoir tiré la carte, on ait vu du coin de l'oeil, que la carte tirée était une figure (valet, dame ou roi) noire.
La probabilité de A va changer, car il ne reste plus alors que les deux valets noirs comme résultats favorables à A, et ils constituent 2 de ces 6 figures.
Elle devient donc $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Si on appelle B l'événement " la carte tirée est une figure noire", on a $P(B) = \frac{6}{52}$.

Lorsqu'on sait que B s'est réalisé, il ne reste plus que 6 résultats possibles et l'événement A comprend 2 de ces résultats.
Donc la nouvelle probabilité de A est

$$\frac{2}{6} = \frac{\frac{2}{52}}{\frac{6}{52}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{probabilité de tirer un valet noir}}{\text{probabilité de tirer une figure noire}}$$

Si l'événement B s'est réalisé, cet événement devient le nouvel univers des possibles,
la **probabilité conditionnelle** de A sachant B se note

$$\mathbf{P(A|B)}$$

On a la formule, valable si $P(B) \neq 0$:

$$\mathbf{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}} \tag{21}$$

ou, le théorème de multiplication

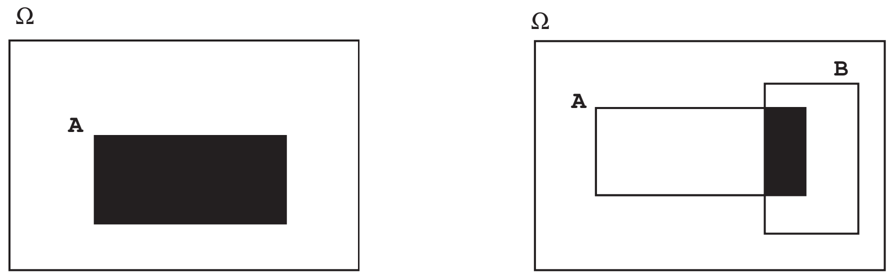

Figure 3: Probabilités conditionnelles

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)} \tag{22}$$

On notera que si A est inclus dans B alors

$$A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A)}}{\mathbf{P(B)}} \tag{23}$$

Exemple
En lançant deux dés, quelle est la probabilité d'avoir une somme égale à 8 si les deux dés indiquent des résultats différents?
Ω contient 36 cas possibles équiprobables.
Soit A l'événement "la somme des dés est 8".
Alors $A = \{(2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2)\}$.
Soit B l'événement "les deux dés indiquent des résultats différents".
Alors $B = \Omega - \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6)\}$.
$A \cap B = \{(2;6), (3;5), (5;3), (6;2)\}$ et

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4/36}{30/36} = \frac{2}{15}$$

Exemple
Pour connaître les intentions de vote de la population, on a interrogé 100 personnes et on leur a demandé pour lequel des partis A, B, C elles voteraient.
On regroupe les résultats dans le tableau 5.
Si on choisit une personne au hasard dans ce groupe, trouver la probabilité
a) qu'elle vote pour le parti A
b) qu'elle vote pour le parti A, si on sait que c'est une femme
c) qu'elle vote pour le parti B ou C, si on sait que c'est un homme
d) que ce soit une femme, si on sait qu'elle vote pour le parti C.

Notons les événements ainsi:
A: "La personne vote pour le parti A"
B: "La personne vote pour le parti B"
C: "La personne vote pour le parti C"
H: "La personne est un homme"
F: "La personne est une femme".

parti sexe	A	B	C	Totaux
hommes	13	21	19	53
femmes	20	8	19	47
Totaux	33	29	38	100

Table 5: intentions de vote

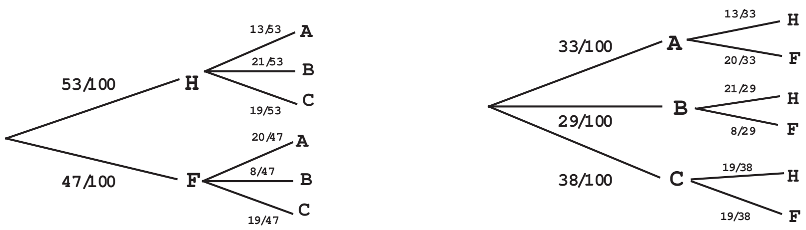

Figure 4: Intentions de vote

On trouve les probabilités suivantes:

$P(A) = \frac{33}{100}, P(B) = \frac{29}{100}, P(C) = \frac{38}{100}, P(H) = \frac{53}{100}, P(F) = \frac{47}{100}, P(A \cap F) = \frac{20}{100}$.

a)

$$P(A) = \frac{33}{100}$$

b)

$$P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{20/100}{47/100} = \frac{20}{47}$$

c) $P(B \cup C|H) = P(B|H) + P(C|H)$, car B et C sont incompatibles.

$$P(B \cup C|H) = \frac{P(B \cap H)}{P(H)} + \frac{P(C \cap H)}{P(H)} = \frac{21/100}{53/100} + \frac{19/100}{53/100} = \frac{40}{53}$$

d)

$$P(F|C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{19/100}{38/100} = \frac{1}{2}$$

La figure 4 donne un résumé des données sous forme d'arbres.

D'un point de vue pratique, il y a deux manières de calculer une probabilité conditionnelle:

- Utiliser la définition $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Considérer directement la probabilité $P(A|B)$ de A par rapport à l'univers réduit B.

Exemple
Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux garçons dans une famille de trois enfants, si on sait qu'il y a au moins une fille?
Si on ne considère aucune restriction, l'univers des possibles est

$$\Omega = \{GGG, GGF, GFG, GFF, FGG, FGF, FFG, FFF\}$$

Soit A l'événement "il y a exactement deux garçons" et B l'événement "il y a au moins une fille".

$$A = \{GGF, GFG, FGG\} \ , B = \{GGF, GFG, GFF, FGG, FGF, FFG, FFF\}$$

Si l'événement B s'est réalisé, B devient le nouvel univers des possibles et

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/8}{7/8} = \frac{3}{7}$$

3.7 Evénements indépendants

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre, c'est-à-dire que:

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

ou bien

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)} \tag{24}$$

On sera attentif à ne pas confondre indépendance et incompatibilité des événements.

- A et B sont incompatibles si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Deux événements peuvent très bien être incompatibles et dépendants!

Exemple
Une urne contient 6 boules blanches et 4 rouges.
On tire successivement deux boules en remettant dans l'urne la boule tirée (tirage avec remise).
On considère les événements:
A: "il sort une boule rouge au premier tirage"
B: "il sort une boule rouge au deuxième tirage"
et on se propose de déterminer si ces événements sont indépendants ou non.
Dans cet exemple, l'univers est l'ensemble de couples ordonnés:

$$\Omega = \{(b, b), (b, r), (r, b), (r, r)\}$$

où (b, r) est l'issue "une blanche au 1er et une rouge au 2ème tirage".
En admettant que toutes les boules sont indistinguables, on a:

$$P(b, b) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{36}{100}$$
$$P(b, r) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{100}$$
$$P(r, b) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{24}{100}$$
$$P(r, r) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{16}{100}$$

On a:

$$A = \{(r, b), (r, r)\}, \ B = \{(b, r), (r, r)\}, \ A \cap B = \{(r, r)\} \neq \emptyset.$$

Ces événements ne sont donc pas incompatibles.

De plus:
$P(A) = \frac{24}{100} + \frac{16}{100} = \frac{40}{100} = P(B)$ et $P(A \cap B) = \frac{16}{100}$ et ainsi, on a bien:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Les événements A et B sont donc bien indépendants, comme le confirmait notre intuition.

Toutefois, **la notion d'indépendance n'est pas aussi intuitive** qu'on peut le penser.

Exemple
Dans l'exemple précédent, on considère les événements:
C: "on tire au maximum une boule blanche"
D: "on tire deux mêmes boules"
alors

$$P(C) = \frac{64}{100}, = P(D) = \frac{52}{100} \text{ et } P(C \cap D) = \frac{16}{100}$$

mais:

$$P(C \cap D) \neq P(C) \cdot P(D)$$

Les événements C et D ne sont donc pas indépendants.

3.8 Epreuves successives

Une expérience aléatoire comporte parfois plusieurs étapes, plusieurs opérations aléatoires, avant d'arriver au résultat définitif. Pour trouver la probabilité de réalisation d'un de ces résultats, il suffit de suivre tous les chemins possibles menant à ce résultat, de calculer la probabilité de réaliser l'événement selon chacun de ces chemins et d'additionner ces probabilités.

Exemple
Un test de diagnostic du cancer a les propriétés suivantes:
a) Si la personne testée a le cancer, le test est positif dans 95% des cas.
b) Si la personne testée n'a pas le cancer, le test est négatif dans 95% des cas.
En moyenne, cinq personnes sur 1000 ont un cancer.
On choisit une personne au hasard et on lui fait subir le test ci-dessus.
1) Quelle est la probabilité qu'elle ait le cancer **et** que le test ait réagit positivement?
2) Quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas le cancer **et** que le test ait réagit positivement?
3) Quelle est la probabilité que le test réagisse positivement?
4) **Sachant** que le test a réagit positivement, qu'elle est la probabilité qu'elle ait le cancer?

Posons C = cancéreux, S = sain, P = positif, N = négatif.
Données:

$$P(C) = \frac{5}{1000} \ , \ P(P|C) = \frac{95}{100} \ , \ P(N|S) = \frac{95}{100}$$

La figure 5 donne un résumé des données sous forme d'arbres.

a)

$$P(C \cap P) = P(C) \cdot P(P|C) = \frac{5}{1000} \cdot \frac{95}{100} = 0,475\%$$

b)

$$P(S \cap P) = P(S) \cdot P(P|S) = \frac{995}{1000} \cdot \frac{5}{100} = 4,975\%$$

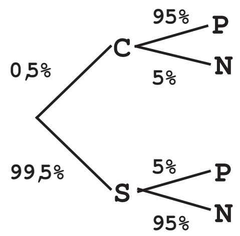

Figure 5: Arbre des données

c)
$$P(P) = P(C \cap P) + P(S \cap P) = 0,475\% + 4,975\% = 5,45\%$$

d)
$$P(C|P) = \frac{P(C \cap P)}{P(P)} = \frac{0,475\%}{5,45\%} = 8,7\%$$

Exercice
Remplir l'arbre de la figure 6 en utilisant les résultats établis.

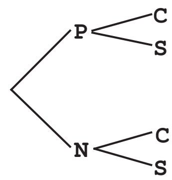

Figure 6: Arbre des résultats

Régles pour le calcul sur un arbre

1) La probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités des branches.

2) La probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités de ses chemins.

3) En chaque croisement, la somme des probabilités des chemins vaut 1.

La règle 1 est justifiée par la formule des probabilités conditionnelles.
La règle 2 est valide car les différents chemins sont incompatibles (mutuellement exclusifs).
La règle 3 provient du fait que l'arbre contient la liste exhaustive de tous les cas possibles.

Exemple
Le facteur distribue au hasard les trois lettres de sa sacoche dans les trois boîtes aux lettres de l'immeuble. Soient L_1, L_2 et L_3 les lettres et B_1, B_2 et B_3 les boîtes.
L'arbre de la figure 7 considère chacune des trois boîtes et énumère leur contenu: 0,1,2 ou 3 lettres.
Expliquer pourquoi il n'est pas correct.

Exemple
Une loterie contient 100 billets, dont 2 gagnants. On tire 12 billets.
a) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant?

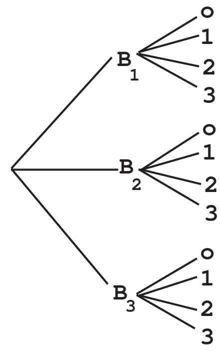

Figure 7: Arbre faux

b) On sait que M. Durand a tiré un billet gagnant en achetant chaque jour un billet pendant douze jours. Quelle est la probabilité que le billet gagnant soit le douzième acheté?

Solution

$PP...P$ signifie "Douze billets perdants".
$PP...G$ signifie "Onze premiers billets perdants, dernier billet gagnant".
$PP...GG$ signifie "Dix premiers perdants, deux derniers gagnants".

a) P(au moins un G) $= 1 - P(PP...P) = 1 - \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{99} \cdot \frac{96}{98} \cdot \frac{95}{97} \cdot \frac{94}{96} \cdot ... \cdot \frac{87}{89} = \frac{17}{75} \approx 23\%$.

Variante:
P(exact 1 gagnant) $= C_1^{12} \cdot P(PP...G) = 12 \cdot P(PP...G) = 12 \cdot \frac{2}{100} \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{97}{98} \cdot ... \cdot \frac{88}{89} = \frac{16}{75}$.

P(exact 2 gagnants) $= C_2^{12} \cdot P(PP...GG) = \frac{12 \cdot 11}{2} \cdot P(PP...GG) = 66 \cdot \frac{2}{100} \frac{1}{99} \cdot \frac{98}{98} \cdot ... \cdot \frac{89}{89} = \frac{1}{75}$.

D'où
P(au moins un billet gagnant) = P(exact 1 gagnant) + P(exact 2 gagnants) $= \frac{16}{75} + \frac{1}{75} = \frac{17}{75}$.

b) $P(PP...G/G) = \frac{P(PP...G)}{P(\text{au moins un billet gagnant})} = \frac{1}{12}$.

Résultat qu'on peut trouver directement puisqu'il y a douze cas possibles équiprobables.

Exemple

Une usine possède deux unités de fabrication, U_1 et U_2.
30% des pièces sont envoyées à l'usine U_1.
L'usine U_2 produit 7% de pièces défectueuses.
Comme il est impossible de connaître directement le pourcentage de pièces défectueuses produite par l'usine U_1, on procède à un contrôle chez les clients (qui reçoivent indifféremment les pièces des deux unités).
On arrive à un pourcentage total de pièces défectueuses de 10%.
Quel est le pourcentage de pièces défectueuses de l'usine U_1?

Solution

Soit x le pourcentage de pièces défectueuses produites par l'usine U_1.
P(Défectueux) = 10% = P(U_1 et Défectueux) + P(U_2 et Défectueux) $= 30\% \cdot x\% + 70\% \cdot 7\%$.
D'où $x = 17\%$.

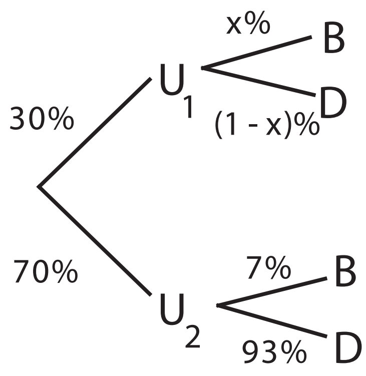

Figure 8: Arbre des données

3.9 Exercices

Exercice 15
Une classe comporte 10 garçons dont 5 ont les yeux marrons et 20 filles dont 10 ont aussi les yeux marrons.
On choisit une personne au hasard; quelle est la probabilité qu'elle soit un garçon ou ait les yeux marrons?

Exercice 16
On jette une pièce de 1Fr, une pièce de 5Fr et un dé. Donner une description explicite des événements suivants:

- *L'univers* Ω *des possibles.*
- *A: "2 faces et un nombre pair apparaissent"*
- *B: "un 2 apparaît"*
- *C: "exactement une face et un nombre premier apparaissent"*
- *A et B se réalisent*
- *B ou C se réalise*

Exercice 17
On jette une paire de dés bien équilibrés.
Calculer la probabilité que l'un au moins des deux chiffres obtenus soit supérieur à 4.

Exercice 18
Si $P(A \cup B) = 7/8$, $P(A \cap B) = 1/4$ *et* $P(\overline{A}) = 5/8$.
Calculer: $P(A)$, $P(B)$ *et* $P(A \cap \overline{B})$.

Exercice 19
Dans un lot de 10 articles, 2 sont défectueux.
Quelle est la probabilité qu'il y ait k *articles défectueux dans un échantillon de taille 3 pris au hasard, si l'on procède:*

a) *sans remise*

b) *avec remise*

Exercice 20
On jette un dé trois fois de suite;
quelle est la probabilité d'obtenir un 6 au deuxième lancé et seulement à ce jet ?

Exercice 21
Une personne possède un trousseau de 4 clefs qui se ressemblent mais dont une seulement ouvre sa porte d'entrée.

a) *Pour ouvrir sa porte, il procède par élimination jusqu'à l'obtention de la bonne clef.*
   1) *Dessiner le diagramme de cette expérience*
   2) *Quelle est la probabilité qu'il doive faire:*
      -2 essais pour obtenir la bonne clef ?
      -4 essais pour obtenir la bonne clef ?
      -au moins 3 essais pour obtenir la bonne clef ?

b) *N'ayant pas tous ses esprits, il n'élimine pas la clef si elle n'est pas bonne; quelle est la probabilité qu'il soit obligé de faire:*
   1) *3 essais pour ouvrir sa porte ?*
   2) *n essais pour ouvrir sa porte ?*

Exercice 22
80% des étudiants d'une université sont suisses et 20% sont étrangers.
6% des étudiants font des maths, 4% sont suisses et font des maths.
On choisit un étudiant au hasard; soient les événements:

- *S: "l'étudiant est suisse"*
- *E: "l'étudiant est étranger"*
- *M: "l'étudiant fait des maths"*

Calculer $P(M/S)$, $P(S/M)$ *et* $P(E/M)$.

Exercice 23
Une fabrique commande régulièrement et en grande quantité un certain type d'élément à un grossiste.
Ce dernier charge un premier livreur de convoyer 80% de la commande et le reste à un deuxième livreur.
Les livraisons sont ensuite regroupées dans un même dépôt de la fabrique.
Dans la part du premier livreur, on a constaté qu'il y a environ 1% d'éléments inutilisables et dans celle du deuxième livreur, 5% des éléments sont inutilisables.
On choisit un élément au hasard;
quelle est la probabilité :

a) *que cet élément ait été livré par le premier convoyeur et qu'il soit en bon état?*

b) *qu'il soit en bon état?*

c) *qu'il provienne de la part du premier livreur si l'on sait qu'il est en bon état?*

Exercice 24
Pour gagner un concours, un joueur doit réussir au moins 2 épreuves sur 3.
Il a une probabilité de 3/4 de réussir la première épreuve, de 2/3 de réussir la deuxième et de 1/2 de réussir la troisième. L'échec a une épreuve a une influence sur la réussite de l'épreuve qui la suit immédiatement , il réduit la probabilité de 30%.

a) *Dessiner le diagramme associé à cette expérience*

b) *Quelle est la probabilité de réussir le concours?*

c) *Quelle est la probabilité qu'il ait échoué à la 2ème épreuve s'il a perdu le concours?*

Exercice 25
On tire successivement sans remise 2 cartes d'un jeu de 52 cartes de 4 couleurs différentes. Soient les événements suivants:

- *A: "la première carte tirée est un as"*
- *B: "la deuxième carte tirée est un roi".*

Ces événements sont-ils indépendants, incompatibles ou équiprobables?

Exercice 26
On choisit, au hasard, 2 des neuf chiffres allant de 1 à 9, le même chiffre pouvant être choisit deux fois.

a) *En supposant que leur somme est impaire, quelle est la probabilité que 2 ait été choisi ?*

b) *Si 2 a été choisi, quelle est la probabilité que la somme soit impaire?*

4 Variables aléatoires discrètes

Dans de nombreuses expériences aléatoires, l'intérêt se porte plutôt sur un nombre réel $X(\omega)$ associé à l'issue ω de l'expérience qu'à l'issue elle-même.
Par exemple, lorsque l'on joue à lancer deux dés, on est intéressé à la somme des nombres indiqués par les dés et non pas au couple de nombres obtenu.
En d'autres termes, on associe à chaque issue $\omega \in \Omega$, un nombre réel $x = X(\omega)$ qui dépend du problème.
X est appelée **variable aléatoire**, c'est une fonction

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Cette variable est **discrète** si l'ensemble des valeurs de X est fini ou dénombrable.
Les valeurs x de X sont $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$.
On note

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{25}$$

Dans le cas contraire, X est une variable aléatoire **continue**. (Voir chapitre suivant)
Une variable aléatoire (discrète, continue) est décrite par la liste des valeurs avec leurs probabilités (**distribution de probabilité, densité de probabilité**).
Pour trouver la probabilité que X prenne des valeurs entre x_i et x_j, il faudra faire une somme dans le cas discret et une intégrale dans le cas continu.
En statistique descriptive, on utilise la fréquence d'apparition des valeurs au lieu de leur probabilité, on a alors la **distribution de fréquence** de X.

4.1 Distribution de probabilité

Exemple 15 (deux dés)
On jette une paire de dés bien équilibrés et à chaque issue, on attribue la somme X des points obtenus.
On cherche la distribution de la variable aléatoire X.
L'ensemble des réalisations de X est $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
Les probabilités associées se calculent ainsi:
Par exemple, $P(X = 5) = P\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} = 4/36 = 1/9$.

La distribution de probabilité de X est donnée par la table 6.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Table 6: Distribution de probabilités de la somme des points lors du jet de deux dés.

On peut vérifier que

$$\sum_{i=1}^{11} p_i = 1$$

Exemple 16 (trois pièces)
On jette trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On cherche la distribution de la variable aléatoire X qui donne le nombre de faces obtenus.
L'ensemble des réalisations de X est $\{0, 1, 2, 3\}$.
La distribution de probabilité de X est donnée par la table 7.

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Table 7: Distribution de probabilités du nombre de faces obtenus lors du lancer de trois pièces.

4.2 Représentation des distributions discrètes

La représentation graphique des distributions des probabilités doit permettre de voir d'un seul coup d'oeil, l'étalement des valeurs de la variable et leurs fréquences.
Les représentations qui satisfont à ces critères sont:

a) Le **diagramme en bâtons**, représenté à la figure 9.

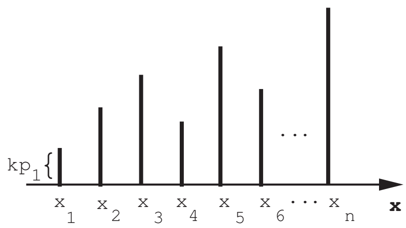

Figure 9: Diagramme en bâtons

En abscisse, on reporte les valeurs x_i et sur la verticale de ces valeurs, on dessine un segment de **longueur proportionnelle** à la probabilité correspondante p_i.

b) L'**histogramme**, représenté à la figure 10:

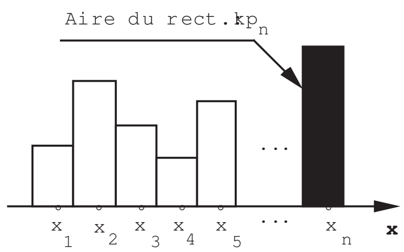

Figure 10: Histogramme

Les valeurs x_i sont les milieux d'intervalles égaux qui sont les bases de rectangles, adjacents ou non, d'**aires proportionnelles** aux probabilités correspondantes.
Dans certains cas, on peut avoir des intervalles inégaux, mais l'aire du rectangle reste proportionnelle à p_i.
Cette représentation est le plus souvent utilisée dans le cas d'un très grand nombre de valeurs de la variable aléatoire.

Exemple 17 (deux dés)
La figure 11 montre un histogramme produit par le tableur EXCEL.
La figure 12 montre le même histogramme avec la courbe de Gauss produit par le tableur MATHEMATICA.

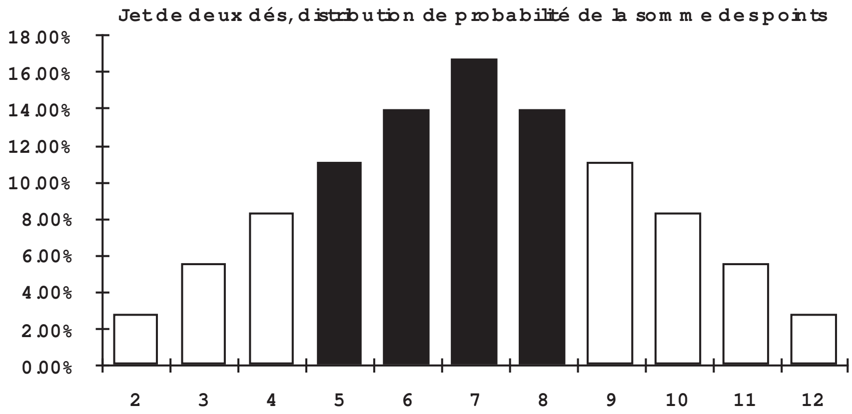

Figure 11: Jet de deux dés: distribution de la somme des points

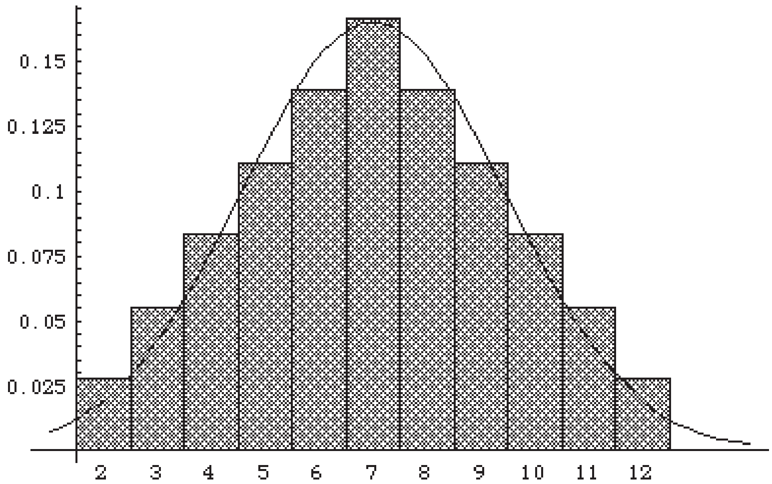

Figure 12: Jet de deux dés: distribution de la somme des points et courbe de Gauss

4.3 Fonctions de répartition et leur représentation

La loi ou distribution de probabilité indique, pour chaque valeur x_i la probabilité p_i que la variable aléatoire X prenne la valeur x_i.
Dans certaines situations, il est plus intéressant de connaître la probabilité $F(x)$ que X prenne une valeur inférieure à une valeur donnée, $P(X \leq x_i)$.
On a alors:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_i)$$

$F(x)$ est une distribution de probabilités cumulées, on l'appelle **fonction de répartition** de X.
Sa représentation graphique a la forme d'un escalier.

Exemple 18 (deux dés)
La fonction de répartition de X est donnée par la table 8 et son graphe par la figure 13.

Exemple
Pour calculer $P(4 < X \leq 8)$, on peut utiliser la distribution de probabilité: (Regarder les zones

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36

Table 8: fonction de répartition de la somme des points lors du jet de deux dés.

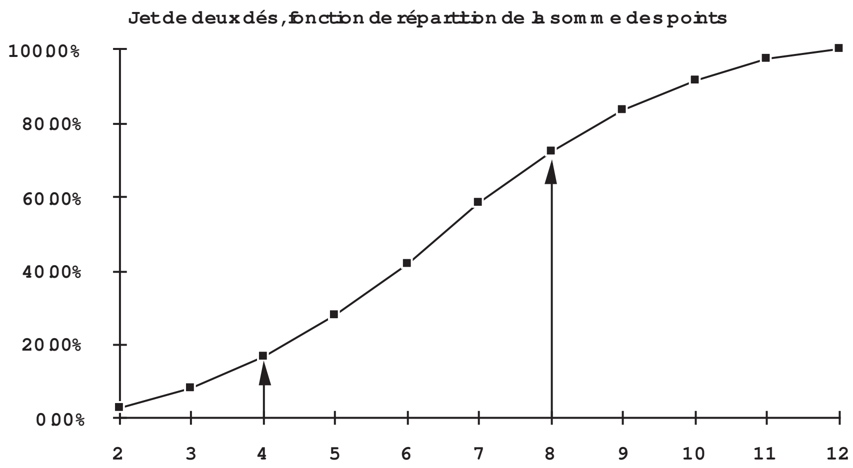

Figure 13: Jet de deux dés: fonction de répartition de la somme des points

hachurées du graphe correspondant).

$$P(4 < X \leq 8) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{20}{36}$$

ou la fonction de répartition: (Regarder les flèches du graphe correspondant)

$$P(4 < X \leq 8) = F(8) - F(4) = \frac{26}{36} - \frac{6}{36} = \frac{20}{36}$$

4.4 Espérance et variance

Une variable aléatoire est déterminée par sa distribution de probabilité, cependant il est commode d'en donner des caractéristiques numériques, moins complètes, mais d'un maniement plus simple.
Les deux principales sont:
- L'**espérance mathématique** ou moyenne, notée $\boldsymbol{E(X)}$ ou $\boldsymbol{\overline{x}}$ ou $\boldsymbol{\mu_X}$.

- La **variance**, notée $\boldsymbol{Var(X)}$ ou $\boldsymbol{s_x^2}$ ou encore $\boldsymbol{\sigma_x^2}$, moyenne des carrés des écarts $X - E(X)$ à la moyenne.

- L'**écart-type**, notée $\boldsymbol{\sigma(X)}$ ou $\boldsymbol{s_x}$ ou encore $\boldsymbol{\sigma_x}$, racine carrée de la variance.

$$E(X) = \mu_X = \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{26}$$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = s_x^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \overline{x})^2 \tag{27}$$

On trouve aussi la médiane, l'étendue, les centiles, déciles et quartiles.

Exemple 19 (deux dés)

$$E(X) = \frac{1}{36}\cdot 2+\frac{2}{36}\cdot 3+\frac{3}{36}\cdot 4+\frac{4}{36}\cdot 5+\frac{5}{36}\cdot 6+\frac{6}{36}\cdot 7+\frac{5}{36}\cdot 8+\frac{4}{36}\cdot 9+\frac{3}{36}\cdot 10+\frac{2}{36}\cdot 11+\frac{1}{36}\cdot 12 = 7$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{1}{36}(2-7)^2+\frac{2}{36}(3-7^2+\frac{3}{36}(4-7)^2+\frac{4}{36}(5-7)^2+\frac{5}{36}(6-7)^2+\frac{5}{36}(7-7)^2+ \\ &\quad \frac{5}{36}(8-7)^2+\frac{4}{36}(9-7)^2+\frac{3}{36}(10-7)^2+\frac{2}{36}(11-7)^2+\frac{1}{36}(12-7)^2 \approx 5,83 \end{aligned}$$

L'espérance est un **paramètre de position**; elle donne une indication sur l'ordre de grandeur des valeurs prises par la variable aléatoire car c'est est une moyenne pondérée des valeurs de X.

La variance, elle, donne une **mesure de la dispersion** des valeurs autour de la moyenne.
Un des avantages de l'écart-type est d'avoir la même unité que la moyenne.
La **médiane** est la valeur de X pour laquelle la fonction de répartition dépasse $\frac{1}{2}$.
Elle se prête moins bien au calcul.

Exemple 20 (deux dés)

L'écart-type $\sqrt{5,83} \approx 2,42$, *la médiane est 7.*

Exemple 21 (jeu)
Deux joueurs A et B conviennent du jeu suivant:
- On jette un dé; s'il sort un nombre pair, le joueur B donne 3 fr. à A. Si 1 ou 3 sort, A donne 5 fr. à B; enfin, si 5 sort, la partie est nulle.
On se demande si ce jeu est équitable.
Considérons la variable aléatoire X qui donne le gain algébrique du joueur A; sa distribution est donnée dans la table 9.

x_i	-5	0	3
p_i			

Table 9: Jeu: distribution de probabilité

on obtient:

$$E(X) =$$

$$Var(X) =$$

4.5 Variable aléatoire centrée réduite

4.5.1 Variable aléatoire centrée

Exemple 22 (deux dés)
Soustrayons la moyenne $\overline{x} = 7$ *aux valeurs* x_i *de* X*, on obtient le tableau 10.*

On vérifiera sans peine que l'espérance de cette nouvelle variable centrée $X' = X - E(X)$ aléatoire est nulle.
Graphiquement cela équivaut à une translation du système d'axes. (Voir figure 14)

x'_i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Table 10: fonction de répartition centrée de la somme des points lors du jet de deux dés.

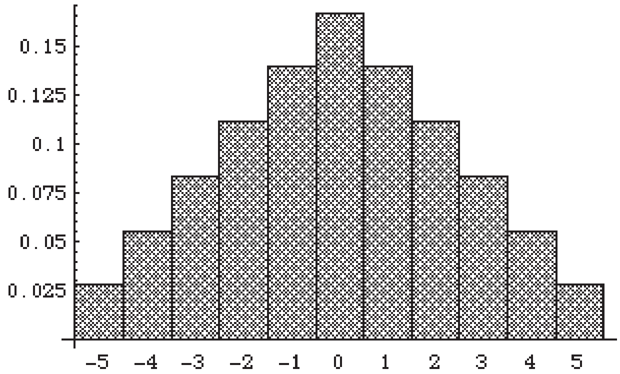

Figure 14: Jet de deux dés: fonction de répartition centrée de la somme des points

4.5.2 Variable aléatoire réduite

Exemple 23 (deux dés)
Divisons par l'écart-type $s = 2,42$ les valeurs x'_i de X', on obtient le tableau 11.

u_i	-2.07	-1.65	-1.24	-0.83	-0.41	0.00	0.41	0.83	1.24	1.65	2.07
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Table 11: fonction de répartition centrée réduite de la somme des points lors du jet de deux dés.

La variable aléatoire centrée réduite

$$U = \frac{X - E(X)}{s_X}$$

a une espérance de 0 et une variance de 1. (Voir figure 15)
Cette réduction est surtout utilisée pour l'usage des tables.

4.6 Exercices

Exercice 27
Dans une tombola, chaque paquet contient 10 billets dont 3 sont des billets gagnants.
Quelqu'un décide d'acheter des billets d'un paquet jusqu'à ce qu'il obtienne un billet gagnant.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de billets que la personne doit acheter pour obtenir un billet gagnant.
Donner la distribution de X; combien de billets doit-elle s'attendre à acheter ?

Exercice 28
On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie; soient les variables aléatoires suivantes:
X : "nombre de faces obtenu"
Y : "nombre de faces qui se succèdent"
Déterminer les distributions de ces variables aléatoires, puis calculer leurs espérances, variances et écarts-type.

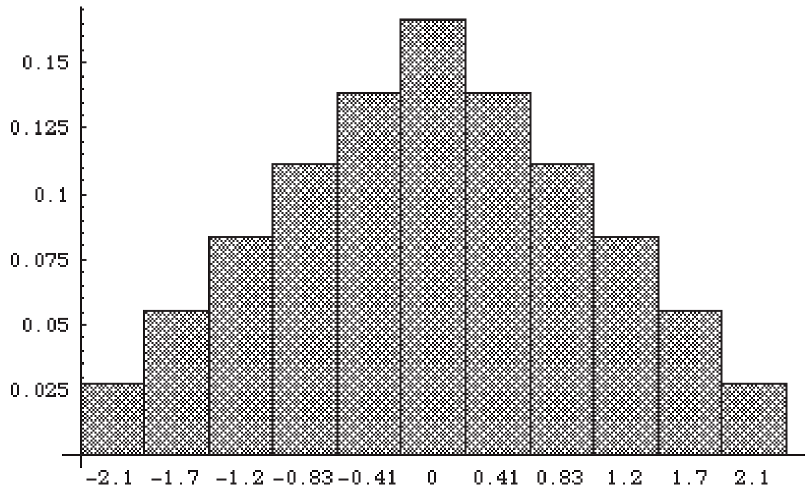

Figure 15: Jet de deux dés: fonction de répartition centrée réduite de la somme des points

Exercice 29
Un homme a 5 clefs semblables dont une seule ouvre son appartement.
Comme il ne reconnaît pas la bonne clef, il essaie les clefs au hasard en éliminant les clefs qui n'ont pas ouvert la porte.
Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre d'essais qu'il a dû faire.
Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 30
Une boîte contient 8 articles dont 2 sont défectueux; on choisit 3 articles de la boîte.
Calculer l'espérance mathématique du nombre d'articles défectueux que l'on a tiré.

Exercice 31
Une enquête a permis de constater que sur 200 flacons d'un même produit pharmaceutique, 50 ne pouvaient être utilisés au-delà de 4 mois après leur livraison.
Ces 200 flacons sont rangés de manière aléatoire sur une étagère.
Trois personnes achètent chacune un flacon dès le premier jour de livraison.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de flacons ne pouvant pas être utilisés après 4 mois.
Donner la distribution de X .

Exercice 32
Le nombre de lettres que reçoivent chaque jour les 3 locataires d'une maison familiale est donné par les variables aléatoires indépendantes X, Y, Z du tableau 12:

x_i	0	1	2	y_i	0	1	2	3	z_i	0	1	2
p_i	0.7	0.2	0.1	p_i	0.2	0.4	0.3	0.1	p_i	0.4	0.4	0.2

Table 12: XYZ

Soit T la variable aléatoire donnant le nombre total de lettres que le facteur distribue chaque jour dans cette maison.
a) Calculer la distribution de T
b) Calculer $E(T)$ et $Var(T)$
c) Calculer les probabilités $P(3 \leq T \leq 5)$ et $P(T \geq 6)$

Exercice 33
Avec les membres d'un conseil communal comportant 4 libéraux, 3 radicaux et 2 socialistes, on doit former une délégation de 4 conseillers. Donner la distribution du nombre possible de libéraux faisant partie de la délégation.

Exercice 34
Deux équipes de sportifs disputent une séries de matchs jusqu'à ce que l'une des deux obtienne 4 victoires et soit déclarée gagnante du tournoi. La première équipe est un peu plus forte que la seconde et de ce fait a une probabilité égale à 0.6 de gagner un match. Trouver la distribution de la variable aléatoire donnant le nombre de matchs que doit effectuer la première équipe pour gagner le tournoi. Donner l'espérance et la variance de cette variable.

Exercice 35
Un article d'un stock est l'objet d'une demande journalière X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau 13.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	>6
p_i	0.10	0.15	0.20	0.25	0.15	0.10	0.05	0

Table 13: Loi de probabilité de la demande journalière

a) Représenter la fonction de répartition de X
b) Pour quelle valeur de x peut-on écrire $P(X < x) = 0.7$?
c) Pour quelle valeur de x peut-on écrire $P(X \geq x) = 0.3$?
d) La vente de cet article donne lieu à un bénéfice égal à 200 fois la racine carrée du nombre d'articles vendus.
Quelle est donc le bénéfice journalier moyen ?

Exercice 36
Un émetteur envoie des signaux 0 et 1. A cause du bruit de fond il y a une probabilité de 0,10 qu'un signal soit changé lorsqu'il traverse le canal reliant l'émetteur au récepteur.
Pour améliorer la qualité on transmet des blocs de 5 chiffres: 00000 au lieu de 0 et 11111 au lieu de 1.
Si un bloc reçu contient plus de 0 que de 1, le récepteur suppose que c'est 00000, sinon que c'est 11111.
Quelle est la probabilité que le bloc 00000 soit bien interprété par le récepteur?

5 Variables aléatoires continues

5.1 Densité de probabilité. Fonction de répartition. Espérance. Variance

Une variable aléatoire X est continue lorsqu'elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini et alors sa loi de probabilité est donnée par une **densité de probabilité** $f(x) \geq 0$ vérifiant

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{28}$$

Comparer avec la formule (25).

La probabilité que X prenne des valeurs entre a et b est alors donnée par:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{29}$$

Remarques

1. $f(x)$ n'est pas la probabilité d'un événement!
2. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$
3. $P(X = x) = 0$

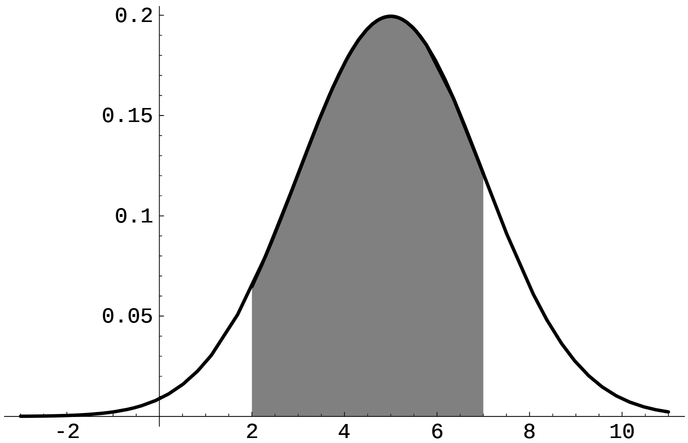

Figure 16: Loi normale: $P(2 \leq X < 3)$

Pour décrire la loi de probabilité de X, on utilise aussi la fonction de répartition définie par

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{30}$$

De manière analogue à ce qui a été fait pour les variables aléatoires discrètes, on définit l'espérance μ et la variance σ^2 d'une variable continue:

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{31}$$

$$\sigma^2 = Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \tag{32}$$

Comparer avec les formules (26,27).

On définit la médiane comme étant la valeur $\tilde{x}$ de telle que

$$P(X \leq \tilde{x}) = P(X \geq \tilde{x})$$

La valeur $\tilde{x}$ partage en deux l'aire sous la courbe $f(x)$.

Si la courbe est symétrique, alors la médiane est égale à la moyenne.
Les variables aléatoires continues sont en principe données par leur densité de probabilité; les principales lois continues sont la loi uniforme, la loi exponentielle et la plus importante: la loi normale.

5.2 La loi normale ou gaussienne

La loi de probabilité la plus importante en statistiques est sans doute la **loi normale** ou loi de Laplace-Gauss.
Supposons que l'on mesure une grandeur soumise à un grand nombre de causes de variations petites et indépendantes; on observe alors que les résultats s'accumulent autour d'une moyenne. Lorsqu'on représente graphiquement ces résultats, on obtient un profil qui revient constamment: celui d'une cloche.
Plusieurs mathématiciens ont étudié ce phénomène.
En 1733 Abraham de Moivre développa une formulation mathématique de cette courbe en forme de cloche. Beaucoup plus tard, Gauss et, indépendamment de lui, Laplace, formulèrent une loi permettant de calculer les probabilités associées aux variations de telles grandeurs. C'est la loi de Laplace-Gauss ou loi normale.

La loi normale est donnée par la densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{33}$$

Pour indiquer que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2, on note

$$\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$$

Conditions d'utilisation
Si une grandeur X résulte de l'influence d'un grand nombre de facteurs **indépendants** agissants sous forme **additive** de façon telle que chaque cause partielle ait une variance faible par rapport à la variance résultante, les mesures de cette grandeur sont distribuées suivant la loi normale.
Le théorème central limite nous dit que toute somme de variables indépendantes est asymptotiquement normale. Cela est vérifié même si les lois sont différentes, les moyennes et les variances distinctes.
La seule restriction est que toutes les variables soient du même ordre de grandeur.

Exemples

- Erreurs accidentelles de mesure (métrologie).
- Variations de longueur de pièces fabriquées en série (technologie).
- Taille des organismes vivants (biologie, génétique).
- Fluctuations de températures, de pressions (météorologie).
- Distributions des vitesses des molécules d'un gaz (physique).

A partir de la définition et de la représentation graphique, on fait les observations suivantes:

- La courbe a une forme dite en cloche, elle est située au-dessus de l'abscisse.
- La courbe est symétrique par rapport à la verticale $x = \mu$.
- La courbe atteint son maximum lorsque $x = \mu$, ce maximum étant $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. .
- La médiane et la moyenne valent toutes deux μ.
- La courbe a deux points d'inflexion d'abscisses $x = \mu \pm \sigma$.
- La courbe s'étend indéfiniment dans les deux directions, l'abscisse est asymptote horizontale.
- L'aire totale sous la courbe est 1.
- $E(X) = \mu$.
- $Var(X) = \sigma^2$.

Une loi normale dépend toujours des deux paramètres μ et σ^2.

Quand ces paramètres sont connus, la loi est entiérement déterminée.

Si μ varie, la courbe se déplace horizontalement (figure 17).

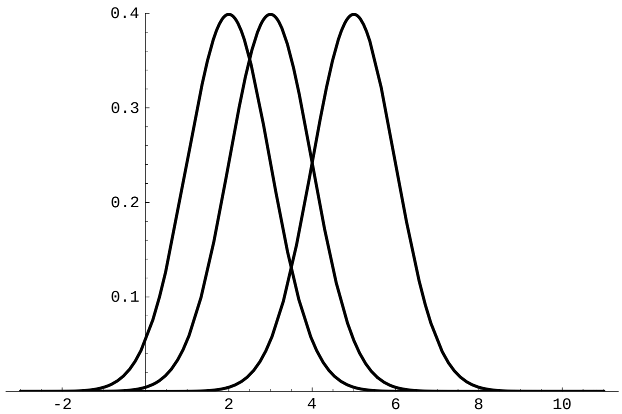

Figure 17: Loi normale: variations de $\mu = 2, 3, 5$

Si σ varie la courbe devient plus condensée ou plus dispersée (figure 18).

La probabilité que X prenne des valeurs entre a et b est donnée par la définition (29):
et la fonction de répartition de la loi normale est donc

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \tag{34}$$

Son graphe est donné par la figure 19.

$F(x)$ est donc une primitive de $f(x)$.
Cette primitive n'est pas exprimable par des fonctions élémentaires.
On peut la calculer par des développements en série, ou donner des approximations numériques (ordinateurs, calculettes, tables).

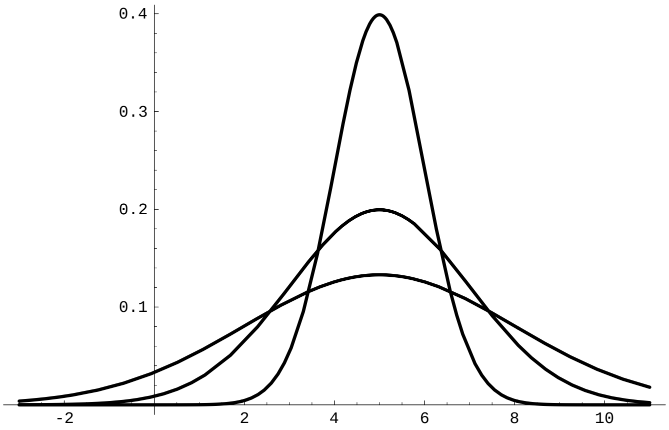

Figure 18: Loi normale: variations de $\sigma = 1, 2, 3$

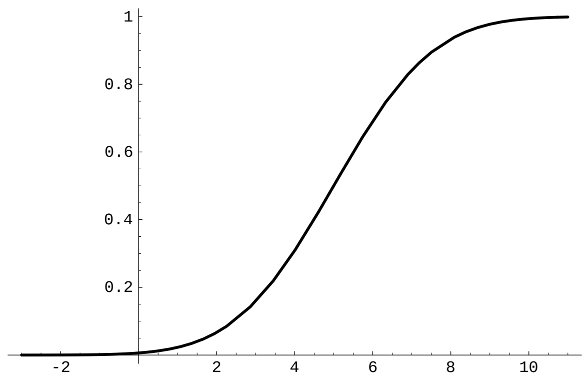

Figure 19: Loi normale: fonction de répartition $F(x)$

Les tables donnent les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $N(0,1)$ uniquement.
La densité de probabilité est alors:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{35}$$

Un changement de variable permet de se ramener à ce cas:

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{36}$$

On a alors:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(u_1 < U < u_2) = F(u_2) - F(u_1)$$

Usage des tables
Attention à ce qui est tabulé et aux résultats donnés par les calculettes et les logiciels statistiques!

Chez Ceresta, Bertaud et Dagnelie, la table donne

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \;, x > 0$$

Chez Rüegg, par contre la table donne:

$$P(0 < X < x) = \int_{0}^{x} f(t)dt \;, x > 0$$

Du fait de la symétrie de la loi normale, il suffit de tabuler les valeurs positives de u, la formule

$$F(-x) = 1 - F(x)$$

permettant de calculer les valeurs négatives.

Exemples:(Voir figure 20)

Pour une variable centrée réduite:

- $P(-1 < U < 1) = 68\%$
- $P(-1.96 < U < 1.96) = 95\%$
- $P(-2.58 < U < 2.58) = 99.7\%$

Pour une variable quelconque:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 68\%$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 95\%$
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 99.7\%$

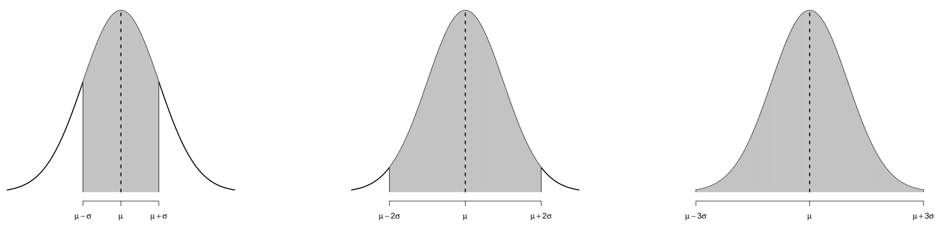

Figure 20: Ecarts à la moyenne. Source: Jacques Zuber, eivd

Exemple 24
Loi $N(12, 4)$. *Calculer* $P(8,5 < X < 15)$.
On a $\sigma = 2$ *et*

$$P(8,5 < X < 15) = P(\frac{8.5 - 12}{2} < U < \frac{15 - 12}{2}) = P(-1.75 < U < 1.5) \approx 0,893$$

car la table donne $F(-1,75) = 1 - F(1,75) \approx 0,040$ *et* $F(1,5) \approx 0,933$.

Exemple 25
On considère que la taille des enfants de 12 ans est une variable aléatoire continue qui obéit à la loi normale de moyenne 125 cm et d'écart-type 15 cm. Si on choisit au hasard un enfant de 12 ans, quelle est la probabilité qu'il ait une taille de plus de 140 cm?

Solution:
Désignons par X *la variable aléatoire représentant la taille des enfants de 12 ans,*
alors $X \sim N(125, 15^2)$. *On cherche* $P(X > 140)$.
Pour trouver cette probabilité, on fait la transformation linéaire $U = \dfrac{X - 125}{15}$.

Ainsi

$$P(X > 140) = P(U > \frac{140-125}{15}) = P(U > 1) = 1 - F(1) \approx 0,1587 \approx 16\%$$

On peut interpréter le résultat en disant que 16% *des enfants de 12 ans ont plus de 140 cm.*

Exemple 26

La durée de vie des ampoules électriques EEL est une variable aléatoire obéissant à une loi normale. La durée de vie moyenne de ces ampoules est de 3000 heures et l'écart-type est de 200 heures. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure plus de 3500 heures?

Solution:
Soit X la variable aléatoire représentant la durée de vie des ampoules électriques EEl, alors $X \sim N(3000, 200^2)$. On cherche $P(X > 3500)$.

$$P(X > 3500) = P(U > 2,5) = 1 - F(2,5) \approx 0,0062 = 0,62\%$$

Exemple 27

Robert s'inscrit à une compétition de lancer du javelot où sont inscrits plusieurs autres participants. Il sait que les performances des participants obéissent à une loi normale de moyenne 64 m et d'écart-type 6 m. Quelle distance doit-il réaliser pour se classer dans les meilleurs 10%*?*

Solution:
Le problème est l'inverse des précédents. En effet, si X est la variable aléatoire représentant la distance des lancers du javelot, on cherche ici une valeur x_i de X telle que $P(X > x_i) = 0.10$. On a $X \sim N(64, 6^2)$. Soit $u_i = \frac{x_i - 64}{6}$, alors

$$P(X > x_i) = P(U > u_i) = 1 - P(U \leq u_i) = 1 - F(u_i) = 0,10$$

Donc $F(u_i) = 0,90$.
On lit la table à l'envers pour trouver la valeur de $u_i \approx 1,28$, on trouve alors $x_i \approx 71,68$. Un lancer égal ou supérieur à 71,68 m permettra à Robert de se classer dans les meilleurs 10%.

Théorème central limite

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes ayant la même distribution de probabilités et si S est la variable aléatoire représentant la somme des X_i, alors pour n tendant vers l'infini,

$$\frac{S - E(S)}{VAR(S)} \sim N(0; 1)$$

Le théorème reste vrai, sans restrictions importantes, lorsque les variables aléatoires X_k ne suivent pas toutes la même loi de probabilité.
De façon un peu floue, on peut dire que si les X_k sont des variables aléatoires indépendantes exerçant une influence comparable sur la dispersion de la somme, et si n est assez grand, la somme $S_n = X_1 + ...X_n$ suit approximativement une loi normale de paramètres μ et σ, où $\mu = E(S_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$ et $\sigma^2 = VAR(S_n) = VAR(X_1) + ... + VAR(X_n)$.

Exemple 28

Dans un circuit électrique 10 éléments sont montés en série. La résistance de chaque élément, R_k, est répartie selon la même loi de probabilité avec $\mu = 100\Omega$ et $\sigma = 1\Omega$.
Quelle est la probabilité que la résistance totale soit comprise entre 995Ω et 1005Ω?

Solution:
On a $R = R_1 + R_2 + ... + R_{10}$ avec $E(R) = 1000$ et $VAR(R) = 10$.
D'après le théorème, $R \sim N(1000, 10)$.
Donc $P(995 < R < 1005) = P(-1,581 < U < 1,581) = F(1,581) - F(-1,581) = 2F(1,581) - 1 \approx 0,860$.

5.3 Exercices

Exercice 37

Pour une variable gaussienne $N(0,1)$, *calculer:*
$P(X > 1.43),\ P(X \leq -0.57),\ P(1.23 < X \leq 2.12),\ P(-1.56 < X \leq 0.54),$
$P(-2.67 < X \leq -1.15)$

Exercice 38

Calculer:
a) $P(X > 13.15)$ *si* X *est* $N(12,1)$
b) $P(X > 7.78)$ *si* X *est* $N(5,4)$
c) $P(-4 < X < 7)$ *si* X *est* $N(5,16)$

Exercice 39

Pour quelle valeur de x *a-t-on:*
a) $P(X < x) = 0.025$
b) $P(X > x) = 0.90$

Exercice 40

Si X *est une loi* $N(\mu,\sigma^2)$ *et que* $P(X < 89) = 0.90$ *et* $P(X < 94) = 0.95$, *calculer alors* μ *et* σ.

Exercice 41

La quantité annuelle de précipitations (en cm) dans un certain endroit suit une loi $N(140,16^2)$. *On suppose que la quantité de précipitations annuelles est indépendante de celles des années précédentes. Quelle est la probabilité qu'à partir de cette année, il faille attendre plus de 10 ans avant d'obtenir une année de précipitations annuelles supérieures à 150 cm?*

6 Corrigé des exercices

6.1 Factorielles et coefficients binômiaux

Corrigé ex 1

a) $\dfrac{1}{990}$ *b)* $\dfrac{1675}{209}$ *c)* $\dfrac{5}{7}$

Corrigé ex 2

a) $(a-2x)^7 = a^7 - 14a^6x + 84a^5x^2 - 280a^4x^3 + 560a^3x^4 - 672a^2x^5 + 448ax^6 - 128x^7$

b) $(x+2y)^5 = x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$

c) $38080x^{39}$

6.2 Analyse combinatoire

Corrigé ex 3

1. 6
2. 156
3. $\dfrac{1}{720}$
4. n
5. $(n+2)(n+1)$
6. $\dfrac{1}{(n+2)(n+1)n}$
7. $(n-r+1)(n-r)$
8. $\dfrac{n+1}{n!}$

Corrigé ex 4

$26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 585000$

Corrigé ex 5
a) On peut permuter une configuration donnée de $P_7 = 7! = 5040$ *manières.*
b) Pour chaque configuration précédente, il y en a 7 équivalentes, obtenues par rotation de la table, donc $5040/7 = 720$.

Corrigé ex 6
On suppose les garçons indiscernables entre eux, de même pour les filles.

a) Il y a $C_3^5 = 10$ *manières de choisir les places des garçons, une fois ceux-ci plaçés, les filles n'ont plus le choix.*
En raisonnant sur les filles, on trouve $C_2^5 = 10$*, la symétrie des coefficients binômiaux est mise en évidence.*

b) Il y a 4 manières de choisir le bloc filles.

On suppose cette fois les garçons discernables entre eux, de même pour les filles.

a) Il y a alors $P_5 = 5! = 120$ *manières de placer 5 personnes.*
b) Il y a 8 manières de choisir le bloc des filles et 3! façons de choisir l'ordre des garçons, donc $8 \cdot 3! = 48$.

Corrigé ex 7
a) $P_4 = 4! = 24$ *b)* $7!/3! = 840$ *c)* $12!/3!/2! = 39916800$

Corrigé ex 8
On suppose les personnes de même nationalité indiscernables entre elles.
a) $4! = 24$.
On suppose les personnes de même nationalité discernables entre elles.
a) On multiplie le résultat précédent par le nombre de permutations dans chaque groupe: $4!3!4!4!2! = 165888$.

Corrigé ex 9
On choisit de C_3^7 *manières les 3 hommes parmi 7 et de* C_2^5 *manières les 2 femmes parmi 5. Le principe de multiplication donne:*
$C_3^7 \cdot C_2^5 = 350$

Corrigé ex 10
a) $C_8^{10} = 45$.
b) $C_5^7 = 21$.
c) exactement 4 des 5 premières:
C_4^5 *choix de 4 parmi les 5 premières et* C_4^5 *choix de 4 parmi les autres, donc* $C_4^5 \cdot C_4^5 = 5 \cdot 5 = 25$ *choix.*
exactement 5 des 5 premières:
Il a $C_3^5 = 10$ *choix des 3 autres.*
TOTAL: $25 + 10 = 35$.

Corrigé ex 11
Pour construire un sous-ensemble de l'ensemble $E = \{a, b, c, ...\}$, *il faut décider si on met ou non l'élément* a *dedans, puis si on y met* b, *puis* c, *etc.. Chaque fois il y a deux possibilités, donc en tout (principe de multiplication)* 2^n.

Corrigé ex 12
C_r^{n+1} *est le nombre de manières de choisir* r *objets parmi* $n + 1$.
Soit $*$ *un de ces objets.*
Je peux choisir mes r *objets en prenant ou non l'objet* $*$*:*
a) Je prends $*$*:*
il y a alors C_{r-1}^n *façons de choisir les* $r - 1$ *autres parmi les* n *objets différents de* $*$.
b) Je ne prends pas $*$*:*
je choisis mes objets parmi les n *restants, et ce de* C_r^n *manières.*
Au total, j'ai donc

$$C_r^{n+1} = C_{r-1}^n + C_r^n$$

Corrigé ex 13
On peut choisir les jouets d'un des enfants de C_3^7 *façons, puis ceux du suivant de* C_2^4 *manières, les jouets restants sont pour le dernier, donc* $C_3^7 \cdot C_2^4 = 210$.
Il y a trois manières de choisir celui qui reçoit trois jouets, donc $3 \cdot 210 = 630$.

Corrigé ex 14
On choisit les 4 élèves de la première classe de C_4^{12} manières, puis ceux de la seconde classe de C_4^8 manières, donc $C_4^{12} \cdot C_4^8 = 34650$.

6.3 Probabilités

Corrigé ex 15

$$P(G \cup M) = P(G) + P(M) - P(G \cap M) = \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{2}{3}$$

Corrigé ex 16
$\Omega = \{(PP1), .., (PP6), (PF1), .., (PF6), (FP1), .., (FP6), (FF1), .., (FF6)\}$.
$A = \{(FF2), (FF4), (FF6)\}$,
$B = \{(FF2), (FP2), (PF2), (PP2)\}$,
$C = \{(FP1), (FP2), (FP3), (FP5), (PF1), (PF2), (PF3), (PF5)\}$,
$A \cap B = \{(FF2)\}$,
$B \cup C = \{(FP1), (FP2), (FP3), (FP5), (PF1), (PF2), (PF3), (PF5), (PP2), (FF2)\}$

Corrigé ex 17
Il y a 36 cas équiprobables.
Un dénombrement direct donne 20 cas favorables.
La probabilité cherchée vaut donc 20/36 = 5/9.

Corrigé ex 18
1) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 3/8$.
2) $7/8 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/8 + P(B) - 1/4$, *donc* $P(B) = 3/4$.
3) Comme $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 3/8 - 1/4 = 1/8$.

Corrigé ex 19
Nous montrerons différentes analyses possibles.

- **Sans remise**

  Analyse 1: **Tirages simultanés**

  Les différents tirages possibles sont équiprobables.

  Il faut utiliser les combinaisons, il y a $C_3^{10} = 120$ *cas possibles.*

  k = 0: $C_3^8 \cdot C_0^2 = 56$ *cas favorables,* $p_0 = 56/120 = 7/15$.

  k = 1: $C_2^8 \cdot C_1^2 = 56$ *cas favorables,* $p_1 = 56/120 = 7/15$.

  k = 2: $C_1^8 \cdot C_2^2 = 8$ *cas favorables,* $p_2 = 8/120 = 1/15$.

  Analyse 2: **Tirages successifs**

  Les différents tirages possibles sont équiprobables.

  Il faut utiliser les arrangements, il y a $A_3^{10} = 720$ *cas possibles.*

  k = 0: $A_3^8 \cdot A_0^2 = 336$ *cas favorables,* $p_0 = 336/720 = 7/15$.

  k = 1: $3 \cdot A_2^8 \cdot A_1^2 = 336$ *cas favorables,* $p_1 = 336/720 = 7/15$.

  Le facteur 3 est nécessaire, car sinon on ne compte que les arrangements du type BBD *et non les* DBB *et* BDB, *(B = Bon, D = Défectueux).*

  k = 2: $3 \cdot A_1^8 \cdot A_2^2 = 24$ *cas favorables,* $p_2 = 24/720 = 1/15$.

  De même, BDD, DBD, DDB.

Analyse 3: **Epreuves répétées**

On fait un arbre des possibles et on utilise les probabilités composées.

k = 0: La branche BBB *a pour probabilité* $\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{15}$.

k = 1: BBD, BDB *et* DBB *sont équiprobables et donnent* $3 \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{7}{15}$.

k = 2: BDD, DDB *et* DBD *sont équiprobables et donnent* $3 \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{15}$.

- *B)* **Avec remise**

Analyse 1: **Tirages simultanés**

Ce n'est plus possible. D'ailleurs les combinaisons avec répétition ne donne pas des tirages équiprobables: BDD *n'a pas la même probabilité que* DDD *par exemple.*

Analyse 2: **Tirages successifs**

Les différents tirages possibles sont équiprobables. Il faut utiliser les arrangements, il y a ${A'}_3^{10} = 10^3 = 1000$ *cas possibles.*

k = 0: ${A'}_3^8 = 8^3 = 512$ *cas favorables,* $p_0 = \frac{512}{1000}$.

k = 1: $3 \cdot {A'}_2^8 \cdot {A'}_1^2 = 3 \cdot 8^2 \cdot 2^1 = 384$ *cas favorables,* $p_1 = \frac{384}{1000}$.

k = 2: $3 \cdot {A'}_1^8 \cdot {A'}_2^2 = 3 \cdot 8^1 \cdot 2^2 = 96$ *cas favorables,* $p_2 = \frac{96}{1000}$.

k = 3: ${A'}_2^3 = 2^3 = 8$ *cas favorables,* $p_3 = \frac{8}{1000}$.

Remarquons que ce cas n'existait pas pour le tirage sans remise.

Analyse 3: **Epreuves répétées**

On fait un arbre des possibles et on utilise les probabilités composées.

k = 0: La branche BBB *a pour probabilité* $\frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{512}{1000}$.

k = 1: BBD, BDB *et* DBB *équiprobables donnent* $3 \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{384}{1000}$.

k = 2: BDD, DDB *et* DBD *équiprobables donnent* $3 \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{96}{1000}$.

k = 3: DDD *a pour probabilité* $\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{8}{1000}$.

Corrigé ex 20

$$P(\overline{6}\,6\,\overline{6}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$

Corrigé ex 21

- *a)*

P(2 essais) $= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.

P(4 essais) $= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

P(3 ou 4 essais) $= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

- *b)*

$$P(\text{3 essais}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}.$$

$$P(\text{n essais}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^{n-1}}{4^n}.$$

Corrigé ex 22

Une disposition visuelle des données est fournie par le tableau 14.

	S	E	Totaux
M	4%	2%	6%
$\overline{M}$	76%	18%	94%
Totaux	80%	20%	100%

Table 14: Mathématiques

Tous les pour-cents sont donnés par rapport à l'ensemble des étudiants.(Même référentiel).

$$P(M/S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{4\%}{80\%} = 5\%$$

$$P(S/M) = \frac{P(M \cap S)}{P(M)} = \frac{4\%}{6\%} \approx 66,6\%$$

$$P(E/M) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{2\%}{6\%} \approx 33,3\% = 1 - P(S/M)$$

Il est utile de dessiner les deux arbres avec, pour le premier, les branches

$$\{MS, ME, \overline{M}S, \overline{M}E\}$$

et, pour le second,

$$\{SM, S\overline{M}, EM, E\overline{M}\}$$

Corrigé ex 23

La difficulté ici provient du fait que les pour-cents donnés ne le sont pas par rapport à l'ensemble des pièces regroupées dans le dépôt, mais relativement à chaque convoyage.
Les données sont représentées sur l'arbre suivant:
a)

$$P(L_1 \cap B) = P(L_1) \cdot P(B/L_1) = 80\% \cdot 99\% \approx 79,2\%$$

b)

$$P(B) = P(L_1 \cap B) + P(L_2 \cap B) = 80\% \cdot 99\% + 20\% \cdot 95\% \approx 98,2\%$$

c)

$$P(L_1/B) = \frac{P(L_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{79,2\%}{98,2\%} \approx 80,6\%$$

Les solutions sont résumées sur le tableau 15.

Corrigé ex 24

b) Notons E_1, E_2 et E_3 les trois épreuves.

$$P(REUSSIR) = P(E_1E_2E_3) + P(\overline{E_1}E_2E_3) + P(E_1\overline{E_2}E_3) + P(E_1E_2\overline{E_3}) =$$

	L_1	L_2	Totaux
B	79,2%	19%	98,2%
$\overline{B}$	0,8%	1%	1,8%
Totaux	80%	20%	100%

Table 15: Convoyeurs

$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{14}{30} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{20} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{31}{48}$.

c) $P(\overline{E_2}/PERDU) = \frac{P(\overline{E_2} \cap PERDU)}{P(PERDU)} = \frac{P(E_1\overline{E_2}\,\overline{E_3}) + P(\overline{E_1}\,\overline{E_2}E_3) + P(\overline{E_1}\,\overline{E_2}\,\overline{E_3})}{P(PERDU)} =$

$\frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{20} + \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{30} \cdot \frac{7}{20} + \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{30} \cdot \frac{13}{20}}{\frac{17}{48}} = \frac{71}{85} \approx 83,53\%$.

Corrigé ex 25
$P(A) = \frac{4}{52}$.
$P(B) = P(ROI \cap ROI) + P(\overline{ROI} \cap ROI) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{4}{52}$.

A et B sont donc équiprobables, résultat intuitivement évident.
A et B ne sont pas incompatibles, car $P(A \cap B) \neq 0$.
A et B ne sont pas indépendants, car $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, résultat intuitivement évident.

Corrigé ex 26
Il y a $9^2 = 81$ cas possibles équiprobables.

a) $P(\Sigma\ impaire) = \frac{40\ cas\ favorables}{81\ cas\ possibles} = \frac{40}{81}$.

$P(2/\Sigma\ impaire) = \frac{P(2 \cap \Sigma\ impaire)}{P(\Sigma\ impaire)} = \frac{10/81}{40/81} = \frac{1}{4}$.

b) $P(\Sigma\ impaire/2) = \frac{P(2 \cap \Sigma\ impaire)}{P(2)} = \frac{10/81}{17/81} = \frac{10}{17}$.

6.4 Variables aléatoires discrètes

Corrigé ex 27
Etablissons une formule générale pour N billets dont n sont gagnants. Quelle est la probabilité d'obtenir k billets gagnants après r tirages?
Il y a A_r^N tirages possibles.
Le nombre de choix des k billets gagnants est A_k^n, le nombre de choix des $r-k$ perdants est A_{r-k}^{N-n}. Ainsi la probabilité cherchée est

$$\frac{A_k^n \cdot A_{r-k}^{N-n}}{A_r^N}$$

Ici $N = 10, n = 3, k = 1$. On obtient

$$P_r = P(X = r) = \frac{(10-r)(9-r)}{240}$$

r	1	2	3	4	5	6	7	8
P_r	3/10	7/30	7/40	1/8	1/12	1/20	1/40	1/120

Table 16: Tombola

Les solutions numériques sont données dans le tableau 16.
L'espérance de X est

$$E(X) = \sum_{i=1}^{8} iP_i = \frac{11}{4}$$

Corrigé ex 28
Les solutions numériques sont résumées dans le tableau 17.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32
$P(Y=k)$	1/32	12/32	11/32	5/32	2/32	1/32

Table 17: Pièces

$$E(X) = \frac{5}{2}\,,\, VAR(X) = \frac{5}{4}\,,\, \sigma_X = \frac{\sqrt{5}}{2}, E(Y) = \frac{31}{16}\,,\, VAR(Y) = \frac{303}{256}\,,\, \sigma_Y = \frac{\sqrt{303}}{16}$$

Corrigé ex 29
Notons B le tirage de la bonne clé et $\overline{B}$ celui d'une mauvaise clé.

$$P(X=1) = \frac{1}{5}\,,\, P(X=2) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{5}\,,\, P(X=3) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{5}\,,\, E(X) = 3\,,\, VAR(X) = 2$$

Corrigé ex 30
Notons B le tirage d'un article non défecteux et D celui d'un article défecteux.

$P(X=0) = P(BBB) = \frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6} = \frac{10}{28}$.

$P(X=1) = 3P(BBD) = 3\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{15}{28}$.

$P(X=2) = 3\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{3}{28}$.

$E(X) = \frac{3}{4}$. $VAR(X) = \frac{45}{112}$.

Corrigé ex 31
B = " Encore bon après 4 mois", D = "Défectueux après 4 mois".

$$P(X=0) = P(BBB) = \frac{150}{200}\cdot\frac{149}{199}\cdot\frac{148}{198} \approx 42\%.$$

$$P(X=1) = 3P(BBD) = 3\cdot\frac{150}{200}\cdot\frac{149}{199}\cdot\frac{50}{198} \approx 42,5\%.$$

$$P(X=2) = 3P(BDD) = 3\cdot\frac{150}{200}\cdot\frac{50}{199}\cdot\frac{49}{198} \approx 14\%.$$

$P(X=3) = P(DDD) = \frac{50}{200} \cdot \frac{49}{199} \cdot \frac{48}{198} \approx 1,5\%.$

La formule générale est

$$P(X=k) = \frac{C_k^{50} \cdot C_{3-k}^{150}}{C_3^{200}}$$

Corrigé ex 32
Soit $T = X + Y + Z$.
a)
$P(T=0) = P(000) = 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,4 \approx 0,056.$
$P(T=1) = P(001) + P(010) + P(100) = 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,4 \approx 0,184.$
$P(T=2) = P(002) + P(020) + P(200) + P(011) + P(110) + P(101).$
Etc,...Notons $P_k = P(T=k)$.
Les solutions numériques sont résumées dans le tableau 18.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
P_k	0,056	0,184	0,28	0,256	0,15	0,058	0,014	0,002

Table 18: Lettres

b)
$E(T) = E(X) + E(Y) + E(Z) \approx 0,4 + 1,3 + 0,8 \approx 2,5$ *et* $Var(T) \approx 1,81.$

c)
$P(3 \leq T \leq 5) = P(T=3) + P(T=4) + P(T=5) = 0,256 + 0,15 + 0,058 = 0,464.$
$P(T \geq 6) = P(T=6) + P(T=7) = 0,014 + 0,002 = 0,016.$

Corrigé ex 33
La probabilité d'avoir k *libéraux est*

$$P_k = P(X=k) = \frac{C_k^4 \cdot C_{4-k}^5}{C_4^9}$$

Les solutions numériques sont résumées dans le tableau 19.

k	0	1	2	3	4
P_k	3,97%	31,7%	47,6%	15,9%	0,8%

Table 19: Libéraux

Corrigé ex 34
Notons U *l'événement "l'équipe 1 gagne un match" et* D *l'événement "l'équipe 2 gagne un match".*
Posons $p = 0,6$ *et* $q = 1 - p = 0,4$.
$P(X=4) = P(UUUU) = p^4.$
$P(X=5) = P(DUUUU) + P(UDUUU) + P(UUDUU) + P(UUUDU) = 4\,q\,p^4.$
$P(X=6) = P(DDUUUU) + P(DUDUUU) + P(DUUDUU) + P(DUUUDU) + P(UDDUUU) + P(UDUDUU) + P(UDUUDU) + P(UUDDUU) + P(UUDUDU) + P(UUUDDU) = 10\,q^2\,p^3.$

Principe général

Pour gagner en k parties exactement, il faut que la dernière partie soit une des 4 gagnantes, sinon le tournoi serait gagné en moins de k parties.
Il faut donc calculer le nombre de mots formé des lettres U et D de longueur k comportant 4 U et se terminant par U. Il s'agit de C_3^{k-1}, le nombre de manières de placer les trois autres U dans les $k-1$ avant-dernières cases. Ainsi:

$$P_k = P(X = k) = C_3^{k-1} p^4 q^{k-4}$$

pour $k \leq 7$, car pour $k > 7$, c'est l'autre équipe qui gagne!

Les solutions numériques sont résumées dans le tableau 20.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
P_k	0,130	0.207	0.207	0.170	0.116	0.0743	0.0446	0.0255

Table 20: Tournoi

On peut généraliser ainsi: "Le tournoi est gagné après r parties gagnantes".
La formule devient:

$$P(X = k) = C_{r-1}^{k-1}\, p^r\, q^{k-r} \text{ pour } k \leq 2r - 1$$

Ici

$$P(X = k) = C_3^{k-1}(0,6)^4(0,4)^{k-4} \ ,\ E(X) = 6,666 \ ,\ Var(X) = 4,444$$

Corrigé ex 35

Notons $F_k = F(x_k) = P(X \leq x_k)$.
a) Les solutions numériques sont résumées dans le tableau 21.

k	0	1	2	3	4	5	6
F_k	0.1	0.25	0.45	0.70	0.85	0.95	1

Table 21: Articles

b) Pour $x = 4$.

c) $P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 0,3$; donc $P(X < x) = 0,7$. Pour $X = 4$.

d) $E(X) = 2,70$ = nombre moyen d'articles vendus.

Le bénéfice est donc de $200\sqrt{2,70} \approx 328,60$.

Corrigé ex 36

Soit X le nombre de 0 non changés en 1. On demande $P(X > 2)$.

$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$

$C_3^5 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^3 + C_4^5 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^4 + C_5^5 \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^5 \approx 0,99144.$

6.5 Variables aléatoires continues

Corrigé ex 37

a) $P(X > 1,43) = 1 - P(X < 1,43) = 1 - F(1,43) = 1 - 0,9236 \approx 7,64\%$.

b) $P(X \leq -0,57) = P(X \geq 0,57) = 1 - F(0,57) = 1 - 0,7157 \approx 28,43\%$.

c) $P(1,23 < X \leq 2,12) = F(2,12) - F(1,23) = 0,9830 - 0,8907 \approx 9,23\%$.

d) $P(-1,56 < X \leq 0,54) = F(0,54) - (1 - F(1,56)) = 0,7054 - (1 - 0,9406) \approx 64,60\%$.

e) $P(-2,67 < X \leq -1,15) = F(2,67) - F(1,15) = 0,9962 - 0,8749 \approx 12,13\%$.

Corrigé ex 38

a) $P(X \geq 13,15) = P(X - 12 \geq 1,15) = P(U \geq 1,15) = 1 - F(1,15) = 1 - 0,8749 = 12,51\%$.

b) $P(X \geq 7,78) = P(\frac{X-5}{2} \geq 1,39) = P(U \geq 1,39) = 1 - F(1,39) = 1 - 0,9177 = 8,23\%$.

c) $P(-4 < X < 7) = P(-\frac{9}{4} < \frac{X-5}{4} < \frac{2}{4}) = P(-\frac{9}{4} < U < \frac{2}{4}) = -(1 - F(\frac{9}{4})) + F(\frac{2}{4}) =$

$-(1 - 0,9878) + 0,6915 = 67,93\%$.

Corrigé ex 39

a) $P(X \leq x) = 0,025 \leftrightarrow P(U \leq \frac{x-20}{5}) = 0,025$, *cette valeur étant inférieure à 0,5, on en conclut que* $u = \frac{x-20}{5}$ *est négatif.*
$P(U \leq u) = P(U \geq -u) = 1 - F(-u) \Rightarrow F(-u) = 0,975 \Rightarrow -u = 1,96 \Rightarrow u = -1,96 \Rightarrow x \approx 10,2$.

b) $P(X > x) = 0,9 \Leftrightarrow P(U > \frac{x-20}{5}) = 0,9$, *on en conclut que* $u = \frac{x-20}{5}$ *est négatif.*
$0,1 = P(U > -u) = 1 - F(-u)$, *donc* $F(-u) = 0,9 \Rightarrow 3 - u = 1,28 \Rightarrow u = -1,28 \Rightarrow x \approx 13,6$.

Corrigé ex 40

$P(X < 89) = 0,90 \Leftrightarrow P(U < \frac{89-\mu}{\sigma}) = 0,90 \Leftrightarrow F(\frac{89-\mu}{\sigma}) = 0,9$, *donc*

(I) $\frac{89-\mu}{\sigma} = 1,28$.

D'autre part, $P(X < 94) = 0,95 \Leftrightarrow P(U < \frac{94-\mu}{\sigma}) = 0,95 \Leftrightarrow F(\frac{94-\mu}{\sigma}) = 0,95$, *donc*

(II) $\frac{94-\mu}{\sigma} = 1,645$.

La résolution du système formé des équations (I) et (II), donne $\mu \approx 71,46$ *et* $\sigma \approx 13,7$.

Corrigé ex 41

$P(X < 150) = P(U < 0,625) = F(0,625) = 0,734$.
La probabilité que X *soit inférieure à 150 cm durant 10 ans est* $0,734^{10} \approx 5\%$, *car les pluviosités sont indépendantes.*

7 Bibliographie

1) Dagnelie P.

2) Lipschutz S.: Probabilités(Collection Schaum - Mac Graw Hill)

3) Zuber J.: Probabilités et statistique, notes de cours, eivd.

8 Exemples de lois

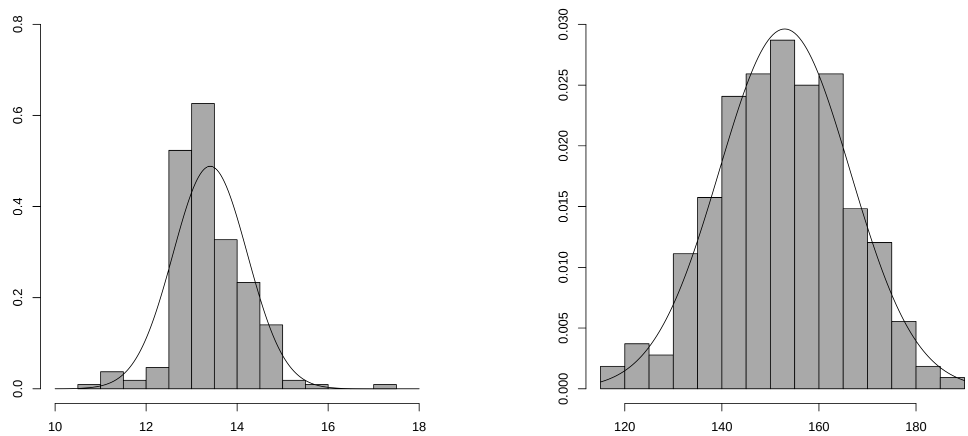

Figure 21: Lois normales:
image de gauche: composants chimiques (Na) dans des débris de verre.
image de droite: chaleur mensuelle consommée dans différents appartements.
Source: Jacques Zuber, eivd

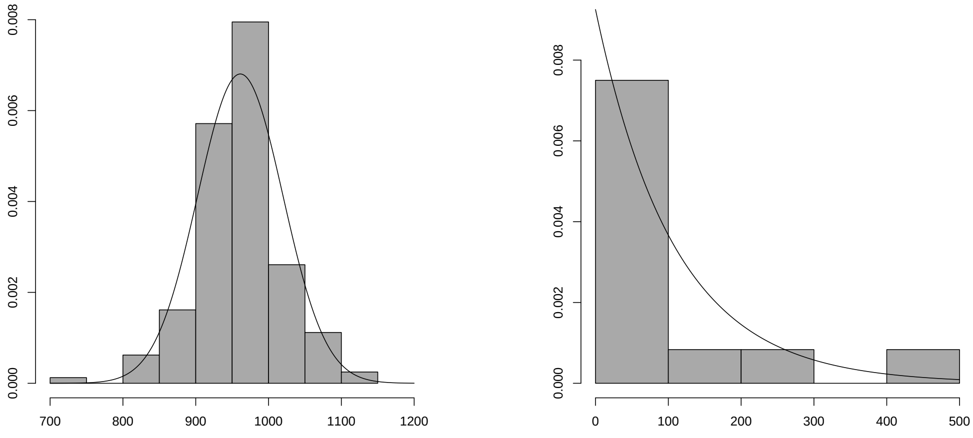

Figure 22: Lois normale et exponentielle:
image de gauche: rendement d'une machine dans un procédé d'usinage.
image de droite: durée de service entre deux pannes consécutives.
Source: Jacques Zuber, eivd

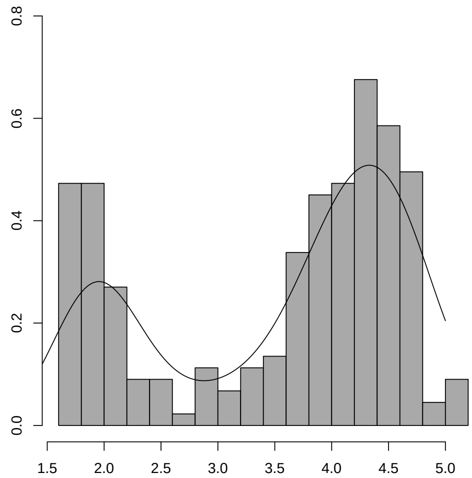

Figure 23: Loi inconnue:
durée d'une éruption volcanique (geyser Yellowstone). Source: Jacques Zuber, eivd