Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

TRIGONOMÉTRIE

Version 2013

Lang Fred

1 Définition des fonctions trigonométriques

1.1 Le cercle trigonométrique

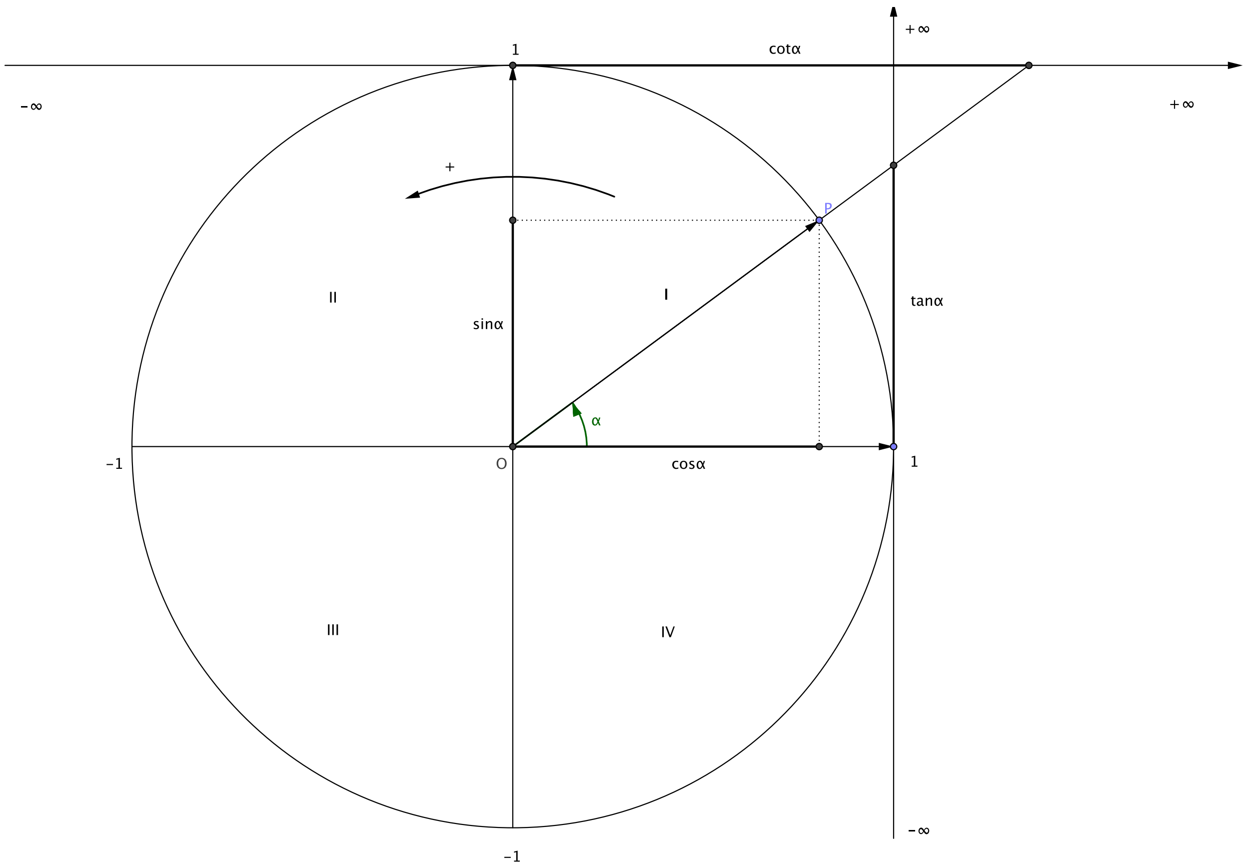


Figure 1: Le cercle trigonométrique: on peut voir OP comme l'aiguille d'une montre.

- Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1. Voir figure (1).
- Un angle α, $-\infty < \alpha < \infty$ est représenté par un point P du cercle, mais un point du cercle représente une infinité d'angles possibles, ils sont tous égaux modulo $360°$ ou modulo 2π.
- Le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre.
- Le cercle est divisé en quatre quadrants: I, II, III, IV.
- La projection de P sur l'axe horizontal donne le cosinus de l'angle, noté $\mathbf{cos(\boldsymbol{\alpha})}$, celui-ci varie entre -1 et $+1$.
- La projection de P sur l'axe vertical donne le sinus de l'angle, noté $\mathbf{sin(\boldsymbol{\alpha})}$, celui-ci varie entre -1 et $+1$.
- La projection de P sur la tangente verticale au cercle donne la tangente de l'angle, noté $\mathbf{tan(\boldsymbol{\alpha})}$, celle-ci varie entre $-\infty$ et $+\infty$.
- La projection de P sur la tangente horizontale au cercle donne la cotangente de l'angle, noté $\mathbf{cot(\boldsymbol{\alpha})}$, celle-ci varie entre $-\infty$ et $+\infty$.

1.2 Valeurs particulières

La figure (2) permet d'obtenir les valeurs particulières des angles figurant dans le tableau (1).

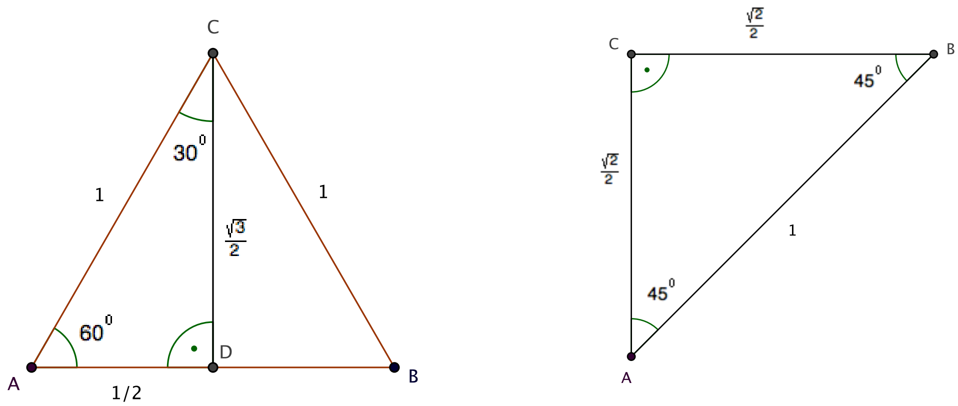


Figure 2: Un triangle équilatéral et un triangle isocèle.

1.3 Signes des fonctions trigonométriques

Le tableau (2) donne le signe des fonctions trigonométriques.

1.4 La fonction cosinus

- Cette fonction est toujours définie.
- Elle est périodique de période $2\,\pi$.
- Elle prend des valeurs entre -1 et 1.
- Elle est nulle si l'angle vaut $\pi/2 + k\,\pi$.
- Elle est positive dans les quadrants I et IV.
- C'est une fonction **paire** car
$$\boldsymbol{\cos(-x) \equiv \cos(x)}$$
- La droite $x = \pi$ est un axe de symétrie du graphe de la fonction, car
$$\cos(\pi - x) \equiv \cos(\pi + x)$$
- Le point $(\pi/2; 0)$ est un centre de symétrie du graphe de la fonction, car
$$\cos(\pi/2 - x) \equiv -\cos(\pi/2 + x)$$

Angle	cosinus	sinus	tangente	cotangente
0	1	0	0	∞
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	∞	0
$2\pi/3$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	-1
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
π	-1	0	0	∞
$7\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1	1
$4\pi/3$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$3\pi/2$	0	-1	∞	0
$5\pi/3$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
$11\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
2π	1	0	0	∞

Table 1: Valeurs des fonctions trigonométriques pour quelques angles simples.

Quadrant	cosinus	sinus	tangente	cotangente
$Ox+$	1	0	0	∞
I	$+$	$+$	$+$	$+$
$Oy+$	0	1	∞	0
II	$-$	$+$	$-$	$-$
$Ox-$	-1	0	0	∞
III	$-$	$-$	$+$	$+$
$Oy-$	0	-1	∞	0
IV	$+$	$-$	$-$	$-$

Table 2: Signes des fonctions trigonométriques

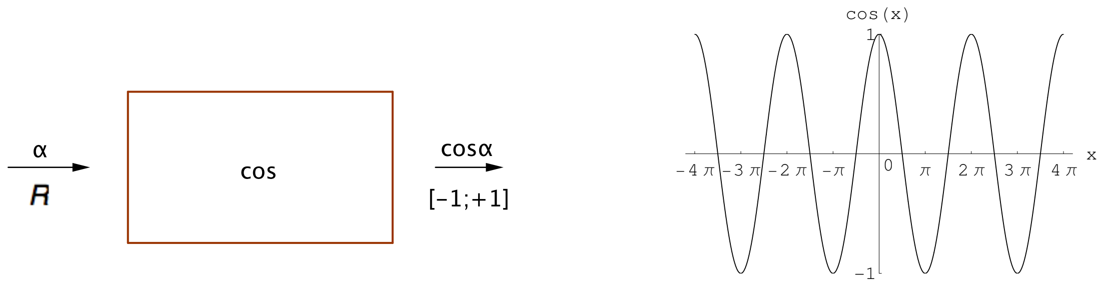


Figure 3: Le cosinus: domaine de définition et ensemble image.

1.5 La fonction sinus

- Cette fonction est toujours définie.
- Elle est périodique de période $2\,\pi$.
- Elle prend des valeurs entre -1 et 1.
- Elle est nulle si l'angle vaut $0 + k\,\pi$.
- Elle est positive dans les quadrants I et II.
- C'est une fonction **impaire** car

$$\boldsymbol{\sin(-x) \equiv -\sin(x)}$$

- La droite $x = \pi/2$ est un axe de symétrie du graphe de la fonction, car

$$\sin(\pi/2 - x) \equiv \sin(\pi/2 + x)$$

- Le point $(\pi; 0)$ est un centre de symétrie du graphe de la fonction, car

$$\sin(\pi - x) \equiv -\sin(\pi + x)$$

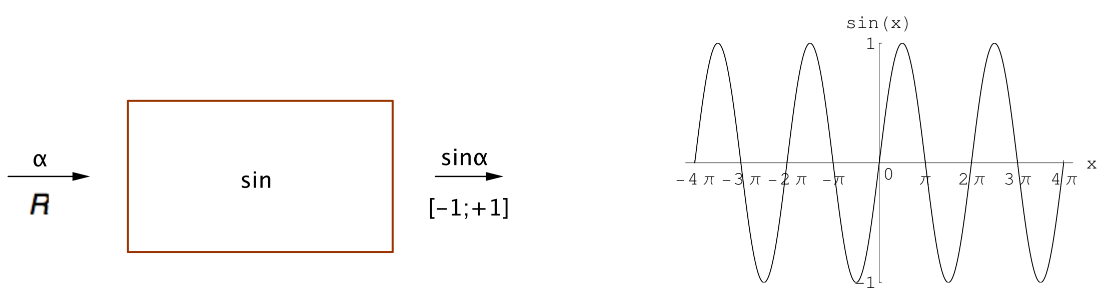


Figure 4: Le sinus: domaine de définition et ensemble image.

1.6 La fonction tangente

- Cette fonction est définie pour des angles différents de $\pi/2 + k\,\pi$.
- Elle est périodique de période π.
- Elle prend des valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.
- Elle est nulle si l'angle vaut $0 + k\,\pi$.
- Elle est positive dans les quadrants I et III.
- C'est une fonction **impaire** car

$$\boldsymbol{\tan(-x) \equiv -\tan(x)}$$

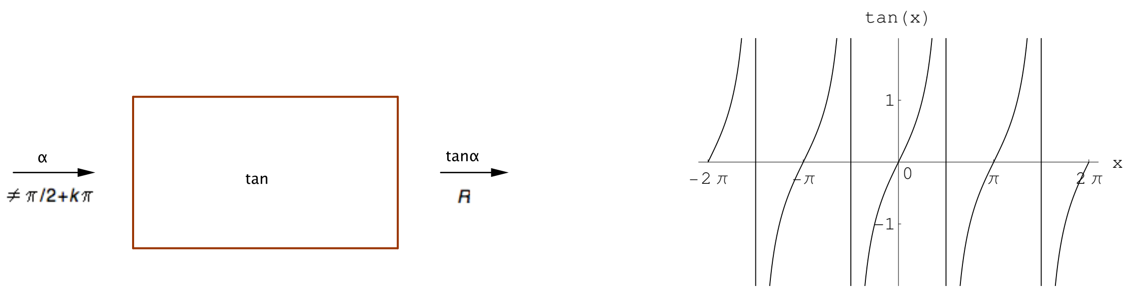


Figure 5: La tangente: domaine de définition et ensemble image.

1.7 La fonction cotangente

- Cette fonction est définie pour des angles différents de $0 + k\,\pi$.
- Elle est périodique de période π.
- Elle prend des valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.
- Elle est nulle si l'angle vaut $\pi/2 + k\,\pi$.
- Elle est positive dans les quadrants I et III.
- C'est une fonction **impaire** car

$$\cot(-x) \equiv -\cot(x)$$

1.8 La fonction arccosinus

- Sur le cercle trigonométrique, deux angles opposés donnent le même cosinus.
- Pour un cosinus donné, on choisit l'angle entre 0 et π , on l'appelle arccosinus et on le note $\boldsymbol{\arccos(x)}$. Voir figure (7).
- Cette fonction n'est définie que pour des valeurs entre -1 et 1.
- Elle prend des valeurs entre 0 et π.
- Elle est nulle pour la valeur 1.
- Elle est toujours positive.

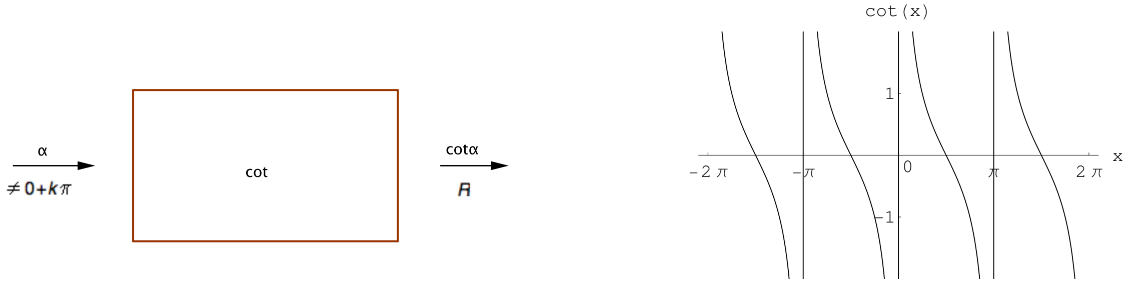


Figure 6: La cotangente: domaine de définition et ensemble image.

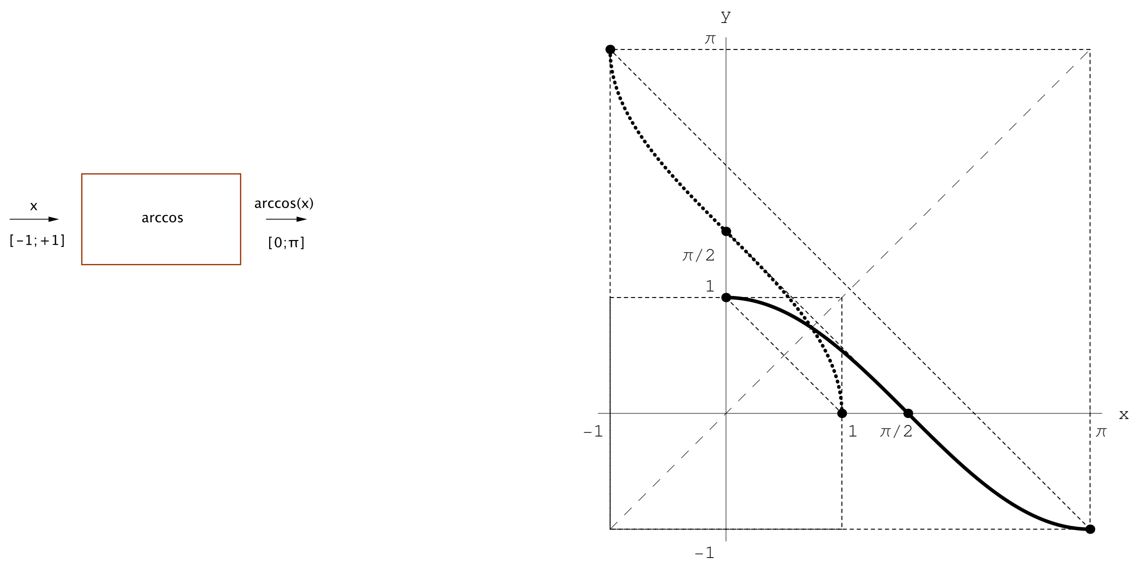


Figure 7: Fonctions cosinus et arccosinus

1.9 La fonction arcsinus

- Sur le cercle trigonométrique, deux angles supplémentaires donnent le même sinus.
- Pour un sinus donné, on choisit l'angle entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, on l'appelle arcsinus et on le note $\boldsymbol{\arcsin(x)}$.Voir figure (8).
- Cette fonction n'est définie que pour des valeurs entre -1 et 1.
- Elle prend des valeurs entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.
- Elle est nulle pour la valeur 0.
- C'est une fonction **impaire** car $\arcsin(-x) \equiv -\arcsin(x)$

1.10 La fonction arctangente

- Sur le cercle trigonométrique, deux angles différants de π donnent la même tangente.
- Pour une tangente donnée, on choisit l'angle entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, on l'appelle arctangente et on le note $\boldsymbol{\arctan(x)}$.Voir figure (9).

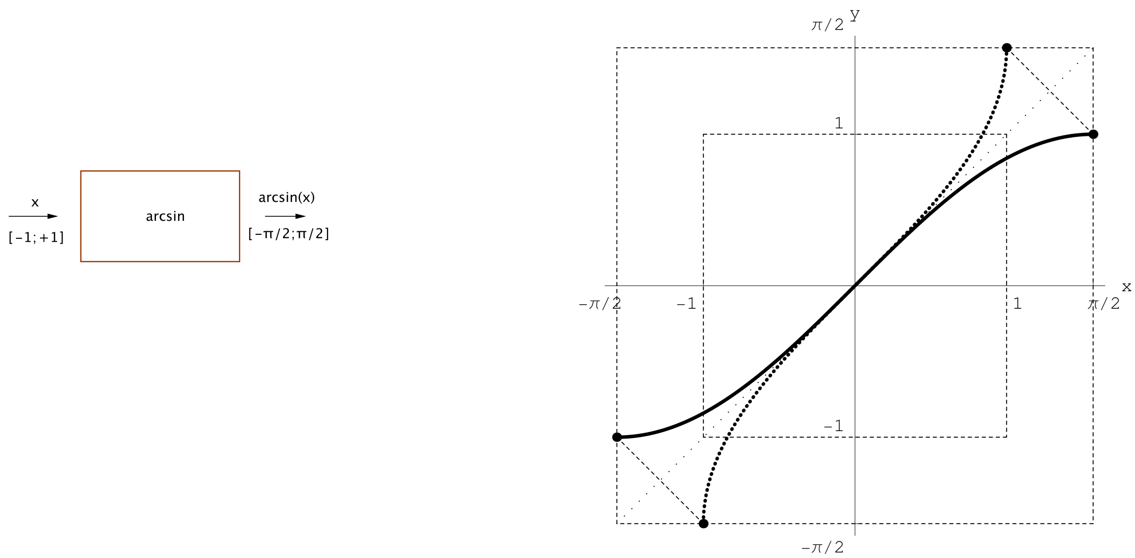


Figure 8: Fonctions sinus et arcsinus, la droite $y = x$ est une tangente commune à l'origine.

- Cette fonction est toujours définie.
- Elle prend des valeurs strictement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.
- Elle est nulle pour la valeur 0.
- C'est une fonction **impaire** car $\arctan(-x) \equiv -\arctan(x)$

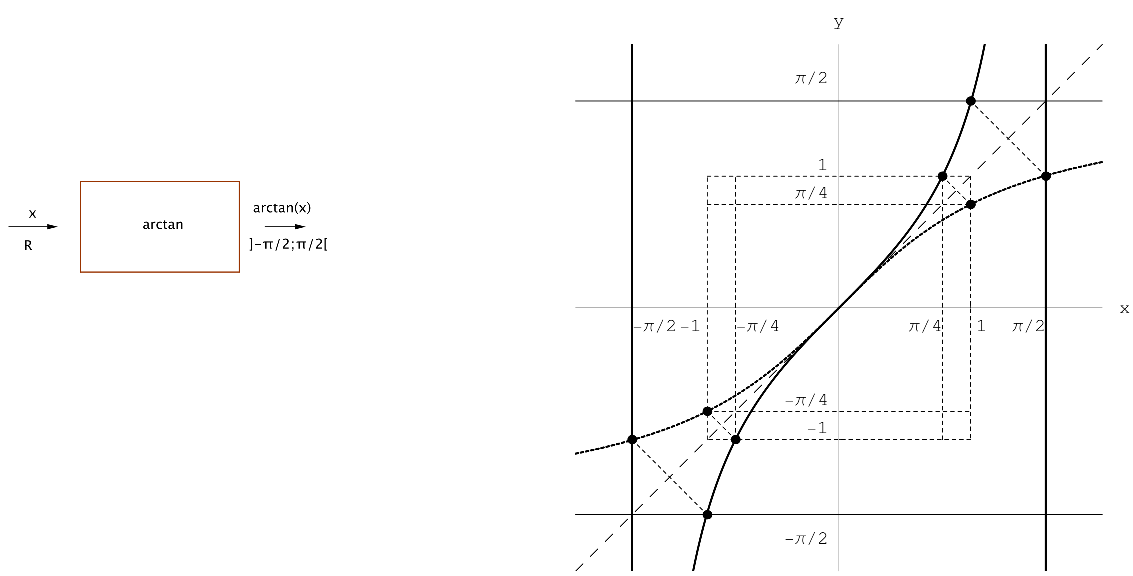


Figure 9: Fonctions tangente et arctangente. Le cadre extérieur est formé des asymptotes! Verticales pour la fonction tangente et horizontales pour arctangente. La droite $y = x$ est une tangente commune à l'origine.

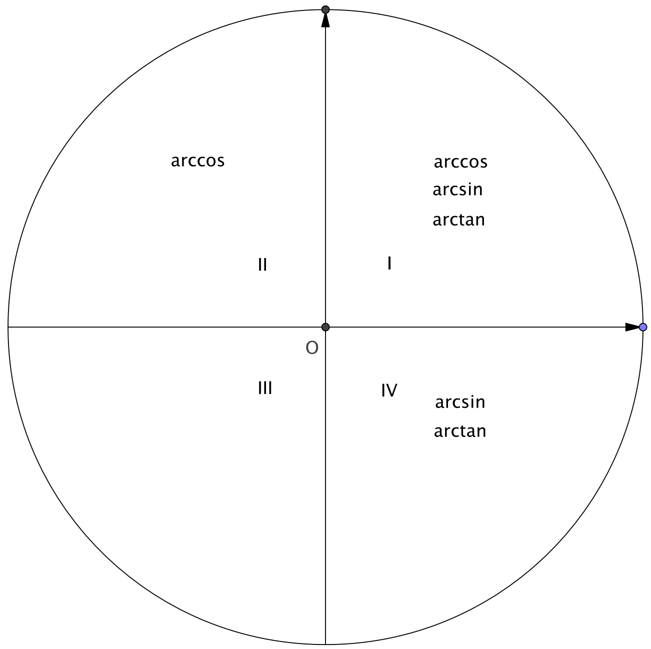


Figure 10: Ensembles images des trois fonctions trigonométriques inverses.

2 Formules de base

2.1 Angles opposés, supplémentaires et complémentaires

Le tableau (3) résume les propriétés que l'on peut obtenir de la figure (11).

propriétés	cosinus	sinus	tangente
périodes	$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha+\pi)=\tan(\alpha)$
opposés	$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$
supplémentaires	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)$
complémentaires	$\cos(\pi/2-\alpha)=\sin(\alpha)$	$\sin(\pi/2-\alpha)=\cos(\alpha)$	$\tan(\pi/2-\alpha)=\cot(\alpha)$
déphasages	$\sin(\alpha)=\cos(\alpha-\pi/2)$	$\cos(\alpha)=\sin(\alpha+\pi/2)$	$\tan(\alpha-\pi/2)=-\cot(\alpha)$
demi-tour	$\cos(\alpha+\pi)=-\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha+\pi)=-\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha+\pi)=\tan(\alpha)$

Table 3: Angles complémentaires, supplémentaires, opposés, déphasés

Ces formules traduisent les nombreuses propriétés visibles sur les graphes de ces fonctions.

2.2 Pythagore, tangente, angles doubles

Les formules ci-dessous sont indispensables pour être un minimum à l'aise en trigonométrie.

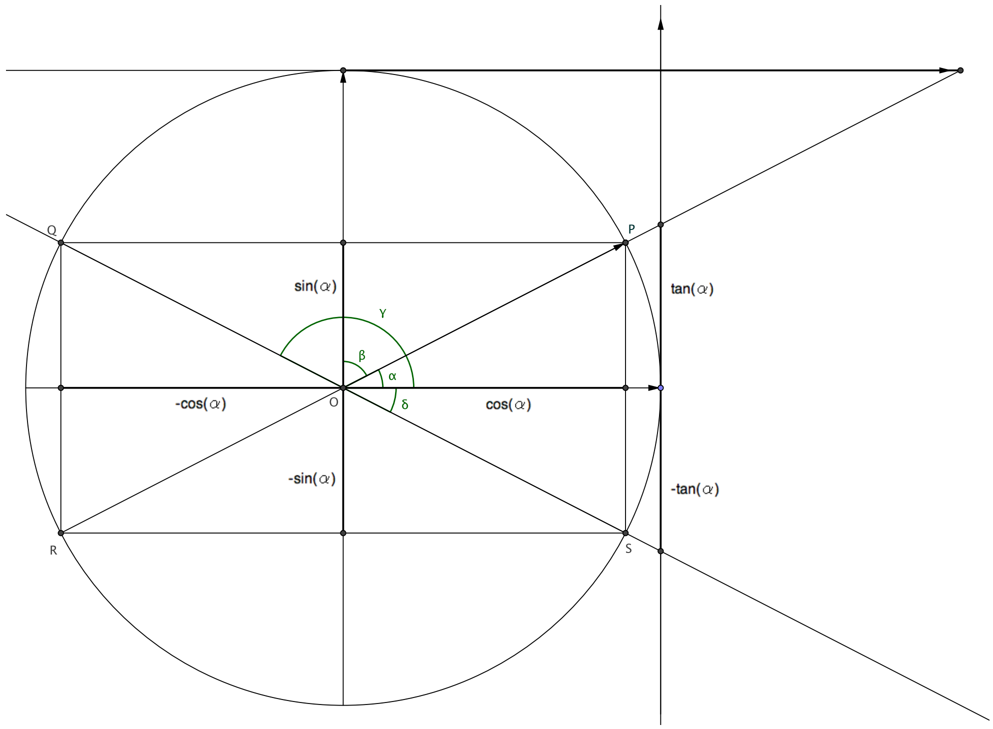


Figure 11: L'angle $\beta = \pi/2 - \alpha$ est le complémentaire, l'angle $\gamma = \pi - \alpha$ est le supplémentaire et l'angle $\delta = -\alpha$ est l'opposé de α.

$$\boldsymbol{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \equiv 1} \tag{1}$$

$$\tan(\alpha) \equiv \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \equiv \frac{1}{\cot(\alpha)} \tag{2}$$

De ces deux formules, on déduit

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \equiv 1 + \tan^2(\alpha) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) \equiv \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)} \tag{4}$$

De laquelle on déduit

$$\boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)} \tag{5}$$

et

$$\boldsymbol{\cos(2\alpha) \equiv \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \equiv 2\cos^2(\alpha) - 1 \equiv 1 - 2\sin^2(\alpha)} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) \equiv \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)} \tag{7}$$

De laquelle on déduit

$$\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{8}$$

et

$$\boldsymbol{\sin(2\alpha) \equiv 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} \tag{9}$$

2.3 Formules de conversions

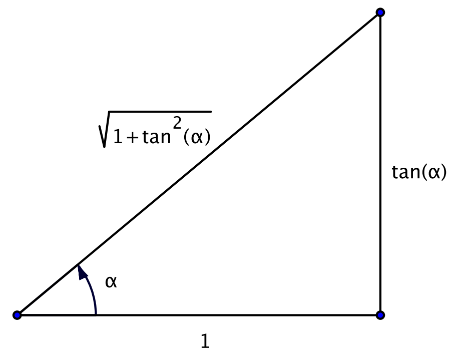


Figure 12: Expression du sinus et du cosinus à l'aide de la tangente, $t = \tan(\alpha)$.

Comme on peut le voir sur la figure (12):

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$

2.4 Formule amplitude-déphasage

2.4.1 Introduction

Une oscillation harmonique (une onde sonore, lumineuse, électromagnétique, ...) donnée sous la forme **"cosinus-sinus"**, c'est-à-dire sous la forme d'une somme d'un cosinus et d'un sinus de même pulsation ω :

$$f(t) = M + a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

peut s'exprimer comme une seule oscillation harmonique sous forme **"amplitude-déphasage"**

$$\boldsymbol{a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \varphi)} \tag{10}$$

2.4.2 Terminologie

Dans la figure (13):

- $M = 5 =$ **Valeur moyenne**
- $A = 2 =$ **Amplitude**, $A > 0$

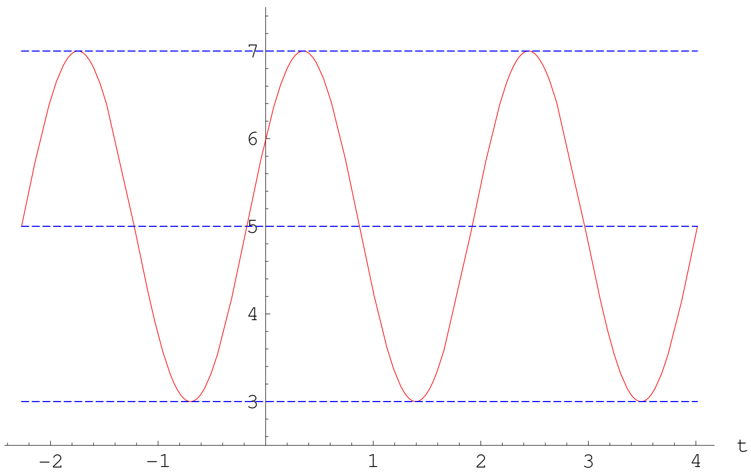


Figure 13: Graphe de $y = 5 + 2\sin(3t + \pi/6)$

- $\varphi = \pi/6 =$ **phase initiale, déphasage**, $-\pi < \varphi \leq \pi$ $[rad]$
- $\omega = 3 =$ **pulsation = fréquence circulaire**, $\omega > 0$ $[rad/s]$
- $\omega t =$ angle $[rad]$
- $\omega t - \varphi =$ phase, angle $[rad]$
- $T = 2\pi/\omega =$ **période** $[s]$, $f(t+T) = f(t)$, pour tous les t
- $f = 1/T = \omega/2\pi =$ **fréquence** $[Hz]$

Exemple
Sur la figure (14), on peut voir la superposition d'un cosinus et d'un sinus de mêmes pulsations, mais d'amplitudes différentes.

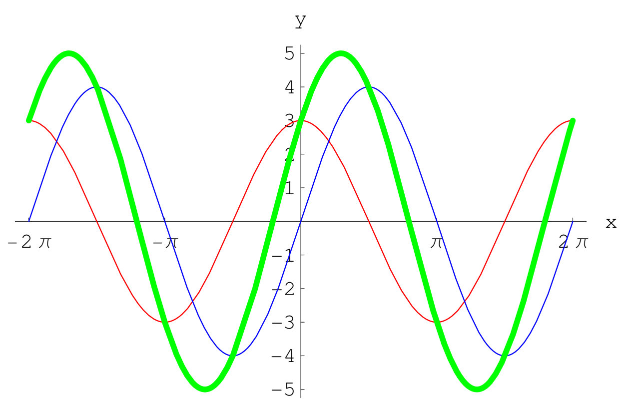


Figure 14: La somme de $3\cos(x)$ et $4\sin(x)$ donne $5\cos(x-\varphi)$, où $\varphi \approx 0,927\,rad \approx 53,13°$.

2.4.3 Formule de passage "aller"

Le passage de la forme "cosinus-sinus" à la forme "amplitude-déphasage" repose sur l'identité trigonométrique :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

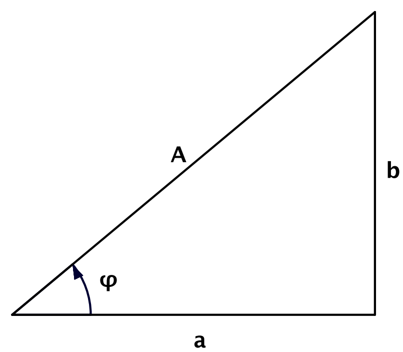
2.4.4 Formule de passage "retour"

Comme

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \varphi) = A\cos(\varphi)\cos(\omega t) + A\sin(\varphi)\sin(\omega t)$$

Il s'agit de résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & = & A\cos(\varphi) \\ b & = & A\sin(\varphi) \end{array} \right\}$$



L'amplitude est égale à

$$\boldsymbol{A = \sqrt{a^2 + b^2}} \tag{11}$$

et le déphasage est donné par:

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{A},$$

Le signe du sinus est celui de $\frac{b}{A}$, donc de b:

$$\boldsymbol{\varphi = \left\{ \begin{array}{ll} +\,\textbf{arccos}\left(\frac{a}{A}\right) & \text{si } b < 0 \\[2ex] -\,\textbf{arccos}\left(\frac{a}{A}\right) & \text{si } b \geq 0 \end{array} \right.} \tag{12}$$

Exemple
Pour l'oscillation

$$2\sqrt{3}\cos(5t) + 2\sin(5t)$$

on a $\omega = 5$, $a = 2\sqrt{3}$ et $b = 2$. Ainsi

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

alors que le déphasage est ($b = 2 \geq 0$) :

$$\varphi = \arccos\left(\frac{a}{A}\right) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Au final

$$2\sqrt{3}\cos(5t) + 2\sin(5t) = 4\cos(5t - \frac{\pi}{6}).$$

Exemple
Pour l'oscillation
$$2\cos(5t) - 2\sqrt{3}\sin(5t).$$
on a $\omega = 5$, $a = 2$ et $b = -2\sqrt{3}$. Ainsi
$$A = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4 \qquad \text{et} \qquad \varphi = -\arccos\left(\frac{2}{4}\right) = -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$
et
$$2\cos(5t) - 2\sqrt{3}\sin(5t) = 4\cos(5t + \frac{\pi}{3}).$$

2.4.5 Autres formes

Les formules
$$\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$
permettent de passer aisément de la forme $A\cos(\omega t - \varphi)$ aux autres formes et réciproquement:
$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t + (-\varphi)) = \sin\left(\omega t + (\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\left(\omega t - (\varphi - \frac{\pi}{2})\right)$$
$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos\left(\omega t + (-\frac{\pi}{2} + \varphi)\right)$$
$$\sin(\omega t - \varphi) = \cos\left(\omega t + (-\frac{\pi}{2} - \varphi)\right)$$
$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t + (-\varphi))$$

Rappelons aussi les formules bien pratiques
$$-\sin(\alpha) = \sin(\alpha + \pi) \qquad -\cos(\alpha) = \cos(\alpha + \pi)$$

Attention !
Le déphasage obtenu par cette méthode n'est pas toujours compris entre $-\pi$ et π et doit parfois être corrigé (en lui ajoutant ou en lui soustrayant 2π).

2.5 Mise en garde

Les fonctions *cos* et *arccos* ne sont pas toujours inverses l'une de l'autre. De même pour *sin* et *arcsin*, *tan* et *arctan*.

On méditera avantageusement sur les graphiques des figures (15).

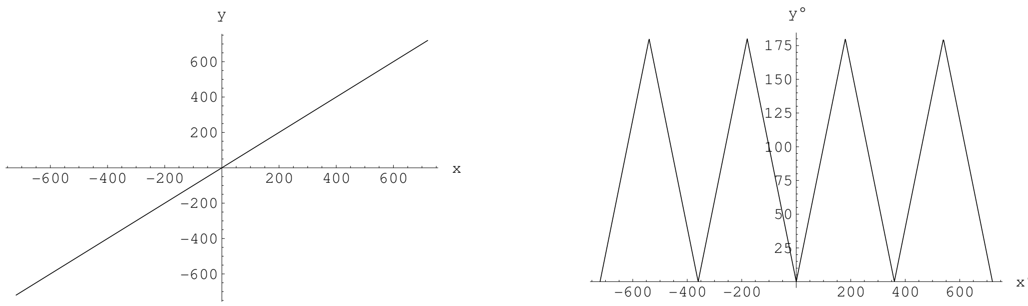


Figure 15: Graphes de $y = \cos(\arccos(x))$ et de $y = \arccos(\cos(x))$

3 Equations et inéquations trigonométriques

3.1 Egalités de sinus, de cosinus, de tangentes ou de cotangentes

$$\boldsymbol{\sin(\alpha) = \sin(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\,2\pi \text{ ou } \alpha = \pi - \beta + k\,2\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boldsymbol{\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\,2\pi \text{ ou } \alpha = -\beta + k\,2\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boldsymbol{\tan(\alpha) = \tan(\beta) \Leftrightarrow \cot(\alpha) = \cot(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\,\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}}$$

3.2 Exemple $\sin(\alpha) \leq \frac{1}{2}$

Sur la figure (16a), on voit que les angles, solutions de l'inéquation, sont sur un arc entre $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$.

Cet arc se décrit par

$$\frac{5\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$$

La figure (16b), nous montre que, sur la droite réelle, il y a une infinité d'arcs solutions, paramétrés par un entier k.
Ainsi

$$\sin(\alpha) \leq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi \leq \alpha \leq \frac{13\pi}{6} + k\,2\pi$$

3.3 Exemple $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) \leq \frac{1}{2}$

Posons

$$\alpha = 3x - \frac{\pi}{3}$$

On retrouve l'inéquation précédente.

$$\sin(3x - \frac{\pi}{3}) \leq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi \leq 3x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{13\pi}{6} + k\,2\pi \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + k\,2\pi \leq 3x \leq \frac{13\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + k\,2\pi \;\Leftrightarrow\; \frac{7\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{15\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3}$$

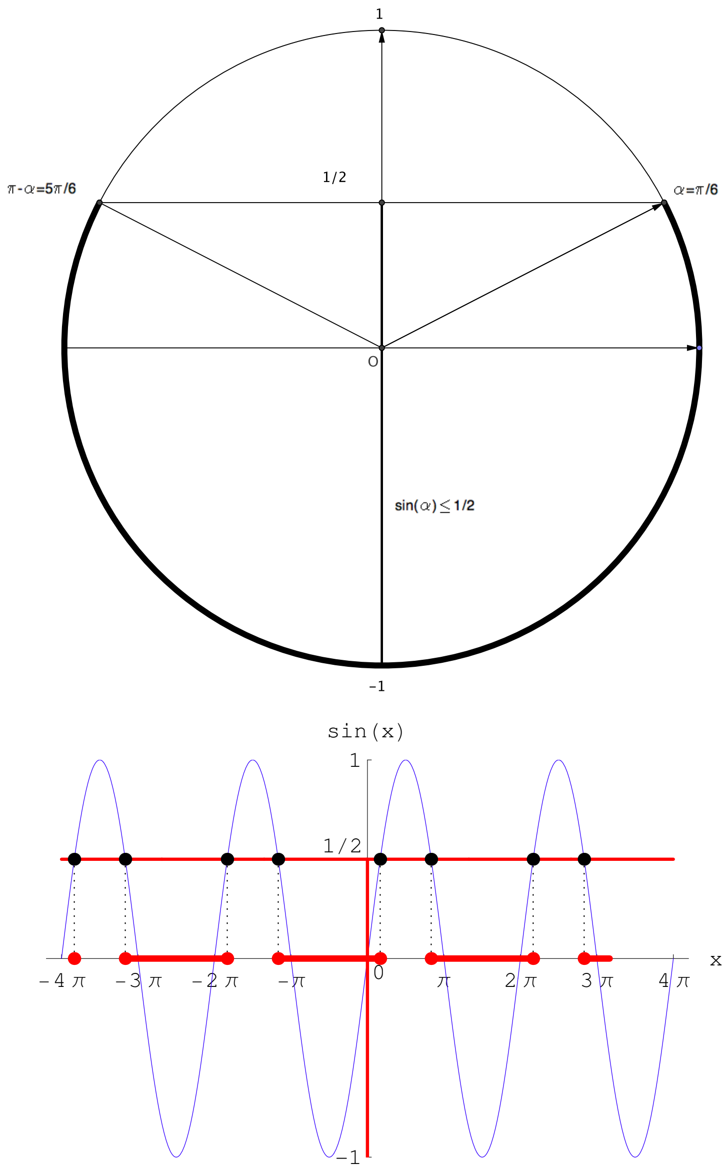


Figure 16: L'inéquation $\sin(\alpha) \leq 1/2$ admet pour solutions un arc de cercle sur le cercle trigonométrique et une infinité de segments sur la droite réelle.

Comme on peut le voir sur la figure (17), le nombre d'arcs est triple.

Cela correspond aux trois valeurs $0, 1, 2$ de k:

k=0 Arc AB

$$\frac{7\pi}{18} \leq x \leq \frac{15\pi}{18}$$

k=1 Arc CD

$$\frac{19\pi}{18} \leq x \leq \frac{27\pi}{18}$$

k=2 Arc EF

$$\frac{31\pi}{18} \leq x \leq \frac{39\pi}{18}$$

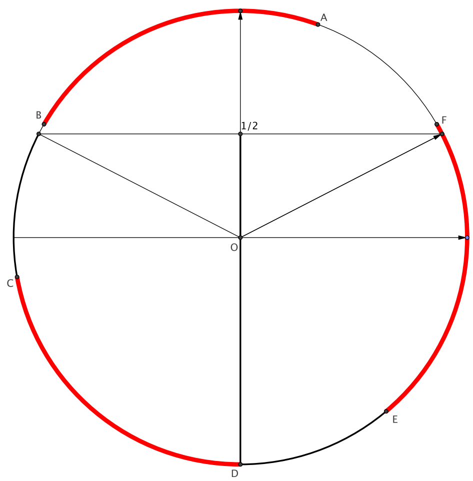


Figure 17: Trois arcs de cercle.

3.4 Exemple $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \cos(2x)$

On va transformer le cosinus en sinus:

$$\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \cos(2x) \Leftrightarrow \sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

Rappelons que deux sinus sont égaux si les angles sont égaux ou supplémentaires:

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \;\Leftrightarrow\; \alpha = \beta + k\,2\pi \;\text{ ou }\; \alpha = \pi - \beta + k\,2\pi$$

On obtient donc, pour notre équation,

1. $$3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + k\,2\pi \Leftrightarrow 5x = \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\,\frac{2\pi}{5}$$

   Donc 5 solutions sur le cercle.

2. $$3x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k\,2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi$$

   Et une solution supplémentaire sur le cercle.

3.5 Equation linéaire: $a\,\cos(x) + b\,\sin(x) = c$

Le plus simple est d'utiliser la formule "Amplitude déphasage" et de se ramener à l'équation

$$A\,\cos(x - \varphi) = c$$

4 Exercices

Exercice 1
Simplifier les expresssions

1. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

2. $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

3. $\tan\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)$

4. $\sin(x+1001\pi)$

Exercice 2
Etablir les identités

1. $\frac{\sin(\theta)+\cos(\theta)}{\cos(\theta)} \equiv 1+\tan(\theta)$

2. $\frac{1}{\cos^2(\theta)} \equiv 1+\tan^2(\theta)$

3. $\frac{\cot(\theta)-1}{1-\tan(\theta)} \equiv \cot(\theta)$

4. $\frac{1}{1-\cos(\theta)}+\frac{1}{1+\cos(\theta)} \equiv \frac{2}{\sin^2(\theta)}$

5. $\frac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)} \equiv \frac{1}{\cos(\theta)}+\tan(\theta)$

6. $\sin^4(\theta)-\cos^4(\theta) \equiv \sin^2(\theta)-\cos^2(\theta)$

7. $\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)} \equiv \frac{1}{\sin(\theta)}+\cot(\theta)$

8. $\frac{\cos^3(\theta)-\sin^3(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)} \equiv 1+\sin(\theta)\cos(\theta)$

Exercice 3
Etablir les identités:

1. $\cos(x+y)+\cos(x-y) \equiv 2\cos(x)\cos(y)$

2. $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y) \equiv \cos^2(x)-\sin^2(y)$

3. $\frac{1}{\tan(x)+\tan(y)} \equiv \frac{\cos(x)\cos(y)}{\sin(x+y)}$

Exercice 4
Mettre sous la forme $A\cos(x-\varphi)$ *les expressions suivantes:*

- $2\cos(x) + 3\,\sin(x)$
- $-2\cos(x) + 3\,\sin(x)$
- $-2\cos(x) - 3\,\sin(x)$
- $2\cos(x) - 3\,\sin(x)$

Exercice 5
Pour chaque cas, représenter les trois fonctions données sur un même graphique :

a) $y = \sin t$, $y = \frac{1}{2}\sin t$ *et* $y = 2\sin t$

b) $y = \cos t$, $y = \cos(\frac{1}{2}t)$ *et* $y = \cos(2t)$

c) $y = \sin t$, $y = \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$ *et* $y = \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 6
Donner les deux oscillations harmoniques de la figure (18) sous forme "amplitude-déphasage".

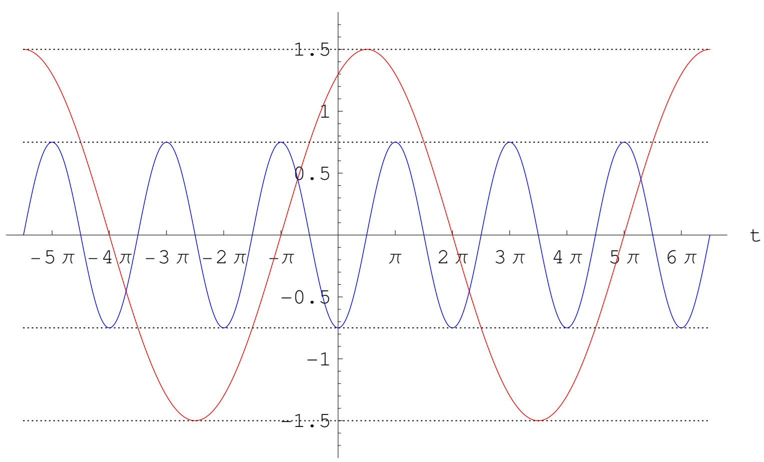


Figure 18: Superpositions d'oscillations.

Exercice 7
Donner les oscillations harmoniques sous forme "amplitude-déphasage".

a) $-7\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ b) $-11\sin\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)$ c) $2\cos\left(-3t + \frac{\pi}{4}\right)$ d) $3\sin\left(-2t - \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 8
Écrire les fonctions suivantes sous la forme "cosinus-sinus".

a) $-6\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ b) $4\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ c) $2\cos\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right)$ d) $2\sin\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right)$

Exercice 9
Écrire les oscillations harmoniques suivantes sous forme "amplitude-déphasage".

a) $-\sqrt{3}\cos(5t) - \sin(5t)$

b) $3\cos(5t) + 3\sin(5t)$

c) $-5\sin t + 2\cos t$

d) $\cos(\pi t) + 2\sin(\pi t)$

Exercice 10
Le mouvement $y(t)$ et la vitesse $v(t)$ d'une masse oscillante sont donnés par les formules:

$$y = y_0 \cos(\omega\, t) + \frac{v_0}{\omega}\, \sin(\omega\, t)$$

$$v = v_0 \cos(\omega\, t) - \omega\, y_0\, \sin(\omega\, t)$$

où $\omega > 0$ est la pulsation.

1. *Remplacer t par 0 et donner une interprétation des constantes y_0 et v_0.*
2. *Mettre les formules sous la forme "amplitude-déphasage" $A\, \cos(\omega\, t - \phi)$.*
3. *A quels moments la position est-elle nulle? A quels moments la vitesse est-elle nulle?*

Exercice 11
La pression $p_1(t)$ exercée sur le tympan par la frappe sur un premier diapason est donnée par la formule

$$p_1(t) = A\sin(\omega\, t)$$

où $A > 0$ et $\omega > 0$ sont des constantes.

Si l'on frappe sur un deuxième diapason, situé à une distance différente, sa pression est donnée par

$$p_2(t) = B\sin(\omega\, t + \tau)$$

où $B > 0$ et $0 \leq \tau \leq 2\pi$ sont des constantes.

La pression totale $p(t)$ est alors la somme des pressions

$$p(t) = A\sin(\omega\, t) + B\sin(\omega\, t + \tau)$$

1. *Mettre la pression totale sous la forme*

$$p(t) = a\, \cos(\omega\, t) + b\, \sin(\omega\, t)$$

2. *Mettre la pression totale sous la forme*

$$p(t) = C\, \cos(\omega\, t - \varphi)$$

3. *Supposons que $A \geq B$*

   L'interférence est destructive si $C \leq A$.

   Déterminer les valeurs de τ pour lesquelles cette inégalité est vérifiée.

   Examiner le cas particulier $A = B$.

4. *L'interférence est destructive totale si $C = 0$.*

   Déterminer les valeurs de τ pour lesquelles cette égalité est vérifiée.

   Examiner le cas particulier $A = B$.

Exercice 12
La vibration y d'une corde de violon de longueur L est donnée en fonction du temps t et du lieu x par la formule

$$y = \sin\left(\frac{\pi\, n}{L}\, x\right) \sin\left(\frac{k\, \pi\, n}{L}\, t\right)$$

où n est un entier et k une constante.
Exprimer y en tant que somme de deux fonctions sinus.

Exercice 13
La pression $p(t)$ exercée sur le tympan par la frappe simultanée de deux diapasons, avec la même force, et situé à la même distance du tympan, est donnée par

$$p(t) = a\, \sin(\omega_1\, t) + a\, \sin(\omega_2\, t)$$

où a, ω_1, ω_2 sont constants.

Si $\omega_1 \approx \omega_2$, le son alterne entre sonorité et silence virtuel. Ce phénomène est appelé "battement". Voir les figures (19).

- *Utiliser une formule pour exprimer $p(t)$ sous forme de produit.*
- *Montrer que $p(t)$ peut être considérée comme une cosinusoïde de période approximative $2\pi/\omega$ où*
$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$
et d'amplitude variable
$$A(t) = 2a \cos\left(\frac{1}{2}\,(\omega_1 - \omega_2)t\right)$$

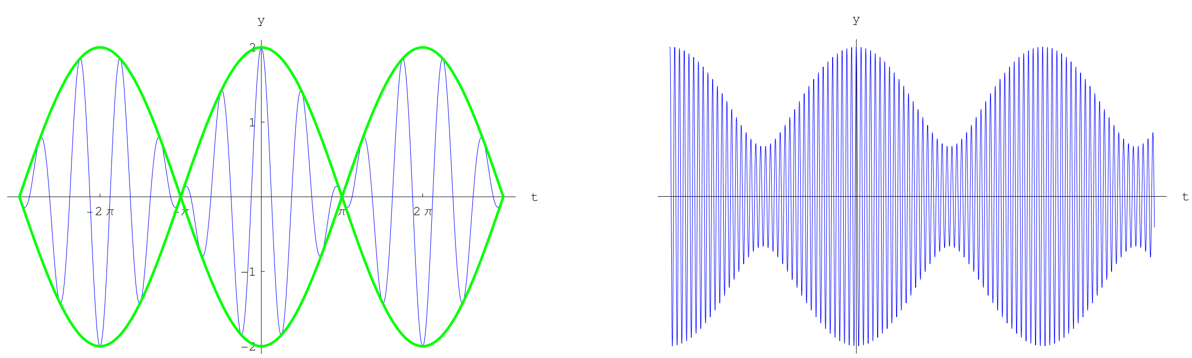


Figure 19: Battements: $p(t) = \cos(4,5\, t) + \sin(3,5\, t)$ et $p(t) = \cos(4\, t) + 2\, \sin(3,9\, t)$.

Exercice 14
Résoudre les équations trigonométriques, donner, en radians et en degrés, toutes les valeurs et celles sur le cercle trigonométrique:

1. $$\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0$$

2.

$$2\tan^2(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} = 2$$

3.

$$\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = 0$$

4.

$$\sin(x) + \cos(x) = 1$$

5.

$$-\cos(x) + \sqrt{3}\,\sin(x) = -1$$

6.

$$\cos(2x) + \cos(x) = -1$$

7.

$$\frac{2 + \sin(3x)}{\cos^2(3x)} = 3$$

8.

$$\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$$

5 Corrigés

Solution 1
Simplifier les expresssions

1. $\sin(x)$
2. $\cos(x)$
3. $\cot(x)$
4. $-\sin(x)$

Solution 2

1. *On décompose la fraction en deux termes.*
2. *On exprime la tangente en fonction du cosinus et du sinus et on somme les fractions.*
3. *On exprime la cotangente en fonction de la tangente et on simplifie la fraction.*
4. *On somme les fractions et on applique Pythagore.*
5. *On exprime la tangente en fonction du cosinus et du sinus, on somme les fractions, on fait le produit croisé et on applique Pythagore.*
6. *Le produit remarquable permet de simplifier l'expression de gauche, on applique Pythagore.*
7. *On exprime la cotangente en fonction du cosinus et du sinus, on somme les fractions, on fait le produit croisé et on applique Pythagore.*
8. *Le produit remarquable permet de simplifier l'expression de gauche,, on simplifier l'équation et on applique Pythagore.*

Solution 3
Etablir les identités:

1. *On applique les formules du cosinus d'une somme et on simplifie.*
2. *On applique les formules du cosinus d'une somme, le produit remarquable permet de simplifier l'expression, Pythagore fait le reste.*
3. *On exprime la tangente en fonction du cosinus et du sinus, on simplifie la fraction de gauche, on utilise la formule du sinus d'une somme et on fait le produit croisé.*

Solution 4
Les amplitudes sont toutes égales à

$$A = \sqrt{13}$$

Les déphasages sont

$$\varphi = +\arccos(+\frac{2}{\sqrt{13}}) \qquad \varphi = +\arccos(-\frac{2}{\sqrt{13}})$$
$$\varphi = -\arccos(-\frac{2}{\sqrt{13}}) \qquad \varphi = -\arccos(+\frac{2}{\sqrt{13}})$$

Solution 5

a) $y = \sin t$, $y = \frac{1}{2}\sin t$ *et* $y = 2\sin t$

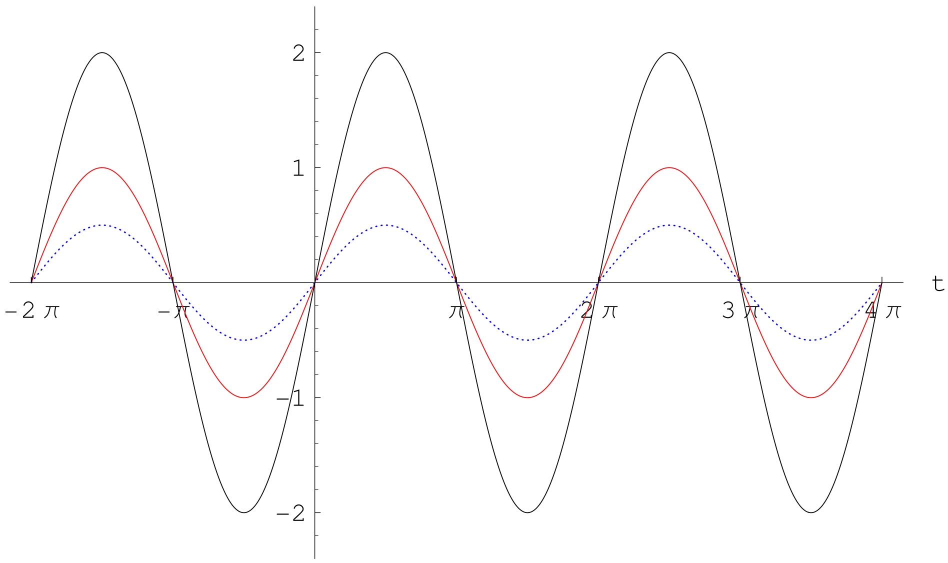


Figure 20: Superpositions d'oscillations.

b) $y = \cos t$, $y = \cos(\frac{1}{2}t)$ *et* $y = \cos(2t)$

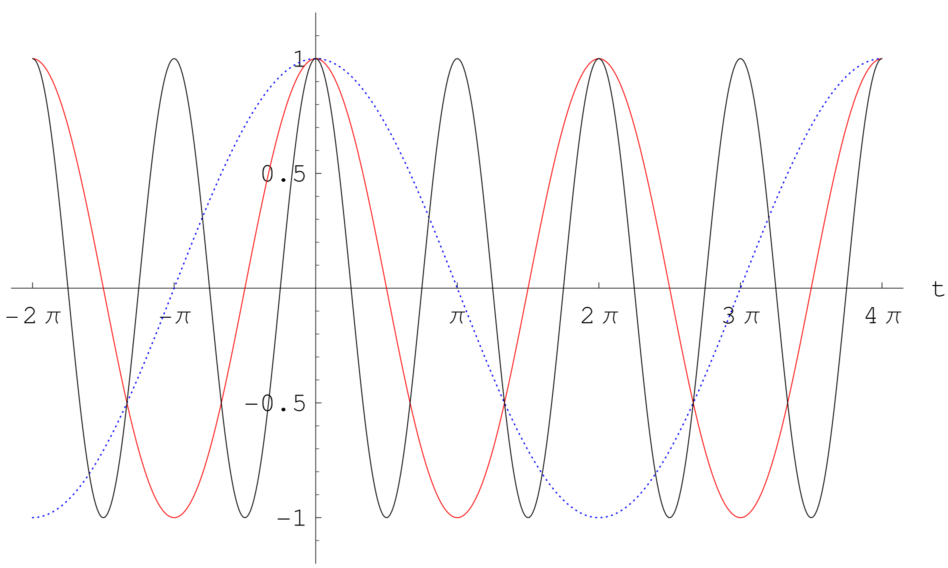


Figure 21: Superpositions d'oscillations.

c) $y = \sin t$, $y = \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$ *et* $y = \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

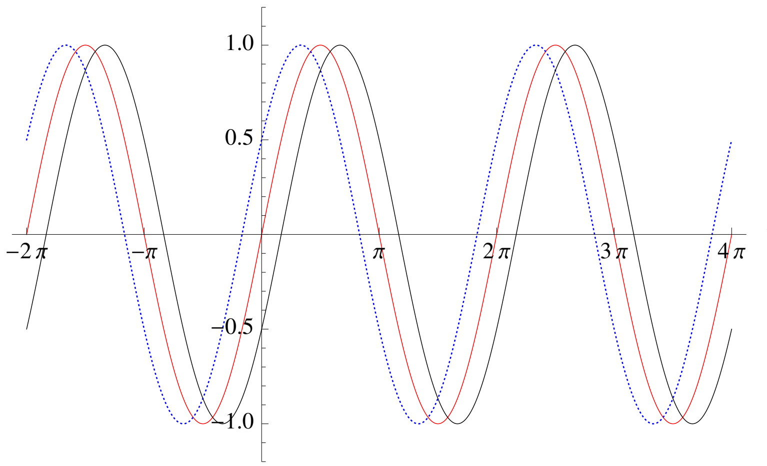


Figure 22: Superpositions d'oscillations.

Solution 6

$$f(t) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{1}{3}t - \frac{\pi}{6}\right) \qquad\qquad g(t) = \frac{3}{4}\cos\left(t + \pi\right)$$

Solution 7

a) $7\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \pi\right)$

b) $11\cos\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $2\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $3\cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right)$

Solution 8

a) $-3\sin(2t) - 3\sqrt{3}\cos(2t)$

b) $2\sqrt{2}\cos(2t) - 2\sqrt{2}\sin(2t)$

c) $-\cos(2t) + \sqrt{3}\sin(2t)$

d) $\sqrt{2}\cos(2t) - \sqrt{2}\sin(2t)$

Solution 9

a) $2\cos\left(5t + \frac{5\pi}{6}\right)$

b) $3\sqrt{2}\cos\left(5t - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\sqrt{29}\cos\left(t + 1.19\right)$

d) $\sqrt{5}\cos\left(\pi t - 1.11\right)$

Solution 10

1) y_0 et v_0 sont la position et la vitesse initiale.

2a)

$$y = y_0\cos(\omega\, t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega\, t) = A\,\cos(\omega\, t - \phi)$$

avec

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Le déphasage dépend du signe de v_0:

$$v_0 \geq 0: \qquad\qquad \phi = +\arccos\left(\frac{y_0}{A}\right)$$

$$v_0 < 0 : \qquad \phi = -\arccos\left(\frac{y_0}{A}\right)$$

2b)

$$v = v_0 \cos(\omega\, t) - \omega\, y_0\, \sin(\omega\, t) = A\, \cos(\omega\, t + \phi)$$

avec

$$A = \sqrt{\omega^2\, y_0^2 + v_0^2}$$

Le déphasage dépend du signe de y_0:

$$y_0 > 0 : \qquad \phi = -\arccos\left(\frac{v_0}{A}\right)$$

$$y_0 \leq 0 : \qquad \phi = +\arccos\left(\frac{v_0}{A}\right)$$

3) La formule est la même dans les deux cas, mais il faut introduire le déphasage ϕ correspondant.

$$y = 0 \Leftrightarrow A\, \cos(\omega\, t - \phi) = 0 \Leftrightarrow \omega\, t - \phi = \frac{\pi}{2} + k\, \pi \Leftrightarrow t = \frac{\phi - \frac{\pi}{2} + k\, \pi}{\omega}$$

Solution 11

1.

$$p(t) = A \sin(\omega\, t) + B \sin(\omega\, t + \tau) = A \sin(\omega\, t) + B \sin(\omega\, t) \cos(\tau) + B \cos(\omega) \sin(\tau) =$$

$$B \sin(\tau) \cdot \cos(\omega\, t) + (A + B \cos(\tau)) \cdot \sin(\omega\, t)$$

donc

$$a = B \sin(\tau)$$

et

$$b = A + B \cos(\tau)$$

2.

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2A\, B\, \cos(\tau)}$$

et

$$\varphi = \begin{cases} +\arccos\left(\dfrac{B\, \sin(\tau)}{C}\right) & \textit{si } A + B\, \cos(\tau) \geq 0 \\ -\arccos\left(\dfrac{B\, \sin(\tau)}{C}\right) & \textit{si } A + B\, \cos(\tau) < 0 \end{cases}$$

3. Supposons que $A \geq B$

$$C \leq A \Leftrightarrow C^2 \leq A^2 \Leftrightarrow A^2 + B^2 + 2A\, B\, \cos(\tau) \leq A^2 \Leftrightarrow \cos(\tau) \leq -\frac{B}{2A}$$

car les A, B, C sont positifs.

Le membre de droite est compris entre -1 et 0, car $A \geq B$.

Un dessin montre que l'arc formé des solutions est donnée par

$$\arccos\left(-\frac{B}{2A}\right) \leq \tau \leq 2\pi - \arccos\left(-\frac{B}{2A}\right)$$

Si $A = B$, on obtient

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \leq \tau \leq 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

ou

$$\frac{2\pi}{3} \leq \tau \leq \frac{4\pi}{3}$$

4.

$$C = 0 \Leftrightarrow C^2 = 0 \Leftrightarrow A^2 + B^2 + 2A\,B\,\cos(\tau) = 0 \Leftrightarrow \cos(\tau) = -\frac{A^2 + B^2}{2AB}$$

Cette dernière équation admet des solutions si

$$-\frac{A^2 + B^2}{2AB} \geq -1 \Leftrightarrow A^2 + B^2 \leq 2AB \Leftrightarrow (A - B)^2 \leq 0$$

Ce qui n'est possible que si $A = B$ et alors $\tau = \pi$.

Solution 12

Posons

$$\alpha = \frac{\pi\,n}{L}\,x \quad \text{et} \quad \beta = \frac{k\,\pi\,n}{L}\,t$$

La formule

$$\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta + \frac{\pi}{2}) + \sin(\alpha + \beta + \frac{3\pi}{2})\right]$$

permet de résoudre le problème.

Solution 13

- $$p(t) = a(\sin(\omega_1\,t) + \sin(\omega_2\,t)) = 2a\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\,t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\,t\right)$$

- $$p(t) = 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\,t\right)\cdot\sin(\omega\,t) = A(t)\cdot\sin(\omega\,t)$$

Solution 14

1.

$$\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0$$

admet les solutions

$$\left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\} + k\,2\pi$$

2.

$$2\tan^2(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} = 2$$

admet les solutions

$$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\} + k\,2\pi = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\} + k\,\pi$$

3.
$$\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = 0$$
n'a pas de solutions.

4.
$$\sin(x) + \cos(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\,\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$
$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k\,2\pi \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\} + k\,2\pi$$

5.
$$-\cos(x) + \sqrt{3}\,\sin(x) = -1 \Leftrightarrow 2\,\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$x - \frac{2\pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{4\pi}{3}\right\} + k\,2\pi$$

6.
$$\cos(2x) + \cos(x) = -1$$
admet les solutions
$$\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right\} + k\,2\pi$$

7.
$$\frac{2 + \sin(3x)}{\cos^2(3x)} = 3$$
admet les solutions
$$x = \frac{1}{3}\,\arcsin\left(\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}\right) + k\,\frac{2\pi}{3}$$
ou
$$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\,\arcsin\left(\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}\right) + k\,\frac{2\pi}{3}$$
Soit 12 solutions sur le cercle.

8.
$$\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$$
Posons
$$s = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$$
L'inéquation devient
$$s^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow s \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \textit{ou} \;\; s \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(a)
$$\frac{5\pi}{4} + k\,2\pi \leq 3x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{4} + k\,2\pi \Leftrightarrow \frac{19\pi}{12} + k\,2\pi \leq 3x \leq \frac{25\pi}{12} + k\,2\pi \Leftrightarrow$$
$$\frac{19\pi}{36} + k\,\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{25\pi}{36} + k\,\frac{2\pi}{3}$$
Ce qui donne trois arcs sur le cercle.

(b)

$$\frac{\pi}{4} + k\,2\pi \leq 3x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{4} + k\,2\pi \Leftrightarrow \frac{7\pi}{12} + k\,2\pi \leq 3x \leq \frac{13\pi}{12} + k\,2\pi \Leftrightarrow$$
$$\frac{7\pi}{36} + k\,\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{13\pi}{36} + k\,\frac{2\pi}{3}$$

Ce qui donne trois arcs de plus sur le cercle.

6 Révisions

Problème 1
Donner la valeur exacte en radians de chacun des angles suivants :

a) 120° *c)* $-72°$ *e)* 100° *g)* $-450°$

b) 210° *d)* $-225°$ *f)* $-5°$ *h)* 468°

Problème 2
Donner la valeur exacte en degrés de chacun des angles suivants :

a) $\frac{-7\pi}{4}$ *c)* $\frac{5\pi}{6}$ *e)* 7π *g)* $\frac{-5\pi}{12}$

b) $\frac{\pi}{16}$ *d)* $\frac{11\pi}{2}$ *f)* $\frac{\pi}{9}$ *h)* $\frac{73\pi}{36}$

Problème 3
Donner la valeur exacte du cosinus, du sinus et de la tangente des angles suivants :

a) $\frac{3\pi}{4}$ *b)* $\frac{-5\pi}{6}$ *c)* $\frac{11\pi}{2}$ *d)* 7π *e)* $\frac{8\pi}{3}$

Problème 4
Simplifier (récrire à l'aide d'une fonction trigonométrique d'argument de base α)

a) $\cos(\alpha + \pi)$ *e)* $\cos(\alpha + \pi/2)$ *i)* $\cos(3\pi/2 - \alpha)$

b) $\sin(\alpha + \pi)$ *f)* $\sin(\alpha + \pi/2)$ *j)* $\sin(-\alpha - 5\pi/2)$

c) $\tan(\alpha + \pi)$ *g)* $\tan(\alpha + \pi/2)$ *k)* $\tan(4\pi - \alpha)$

d) $\cot(\alpha + \pi)$ *h)* $\cot(\alpha + \pi/2)$ *l)* $\cot(\alpha - \pi)$

Problème 5
Donner toutes les solutions des équations suivantes :

a) $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{7})$ *b)* $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{7})$ *c)* $\tan(x) = \tan(\frac{\pi}{7})$

Problème 6
Donner toutes les solutions des équations suivantes :

a) $\cos(\frac{t}{4}) = 1$ *b)* $\cos(\frac{t}{5}) = 1$ *c)* $\cos(\frac{t}{4}) + \cos(\frac{t}{5}) = 2$

Problème 7
Donner toutes les solutions des équations et des systèmes d'équations suivants :

a) $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$

b) $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ *et* $\cos(\alpha) < 0$

c) $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ *et* $\cos(\alpha) < 0$ *et* $-\pi < \alpha \leq \pi$

Problème 8
Donner toutes les solutions des équations et des systèmes d'équations suivants :

a) $\tan(\theta) = \sqrt{3}$

b) $\tan(\theta) = \sqrt{3}$ *et* $\cos(\theta) < 0$

c) $\tan(\theta) = \sqrt{3}$ *et* $\cos(\theta) < 0$ *et* $-\pi < \theta \leq \pi$

Problème 9
a) Utiliser la formule du cosinus de l'angle double afin de donner les valeurs exactes de

i) $\cos(\frac{\pi}{8})$ *ii)* $\cos(\frac{\pi}{16})$ *iii)* $\cos(\frac{\pi}{32})$

b) Utiliser les identités pour la somme de deux angles afin de donner les valeurs exactes de

i) $\cos(\frac{7\pi}{12})$ *ii)* $\sin(\frac{7\pi}{12})$ *iii)* $\tan(\frac{7\pi}{12})$

Problème 10
Donner les valeurs exactes des expressions suivantes :

a) $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$ *c)* $\arcsin(-1)$ *e)* $\arccos(0)$

b) $\arccos(-1)$ *d)* $\arctan(-\sqrt{3})$ *f)* $\arcsin(-\frac{1}{2})$

Problème 11
Simplifier les expressions suivantes :

a) $\arcsin(-x)$ *c)* $\arctan(-x)$ *e)* $\cos(\arctan(x))$

b) $\arccos(-x)$ *d)* $\sin(\arccos(x))$ *f)* $\tan(\arcsin(x))$

Problème 12
Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sin(\arcsin(\frac{1}{3}))$ *c)* $\arctan(\tan(2{,}5))$ *e)* $\cos(\arccos(\frac{2}{3}))$

b) $\arcsin(\sin(2))$ *d)* $\arccos(\cos(6))$ *f)* $\cot(\arctan(0))$

Problème 13
Construire les fonctions $\arccos(x)$ *et* $\arcsin(x)$ *au moyen de la fonction* $\arctan(x)$.

Problème 14
Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

a) $\cos(\arccos(x))$ *pour* $-1 \leq x \leq 1$

b) $\arccos(\cos(x))$ *pour* $x \in \mathbb{R}$

c) $\arccos(\sin(x))$ *pour* $0 \leq x \leq \pi$

7 Annexe: Théorèmes du sinus, du cosinus et de la somme des angles

7.1 Théorème du sinus

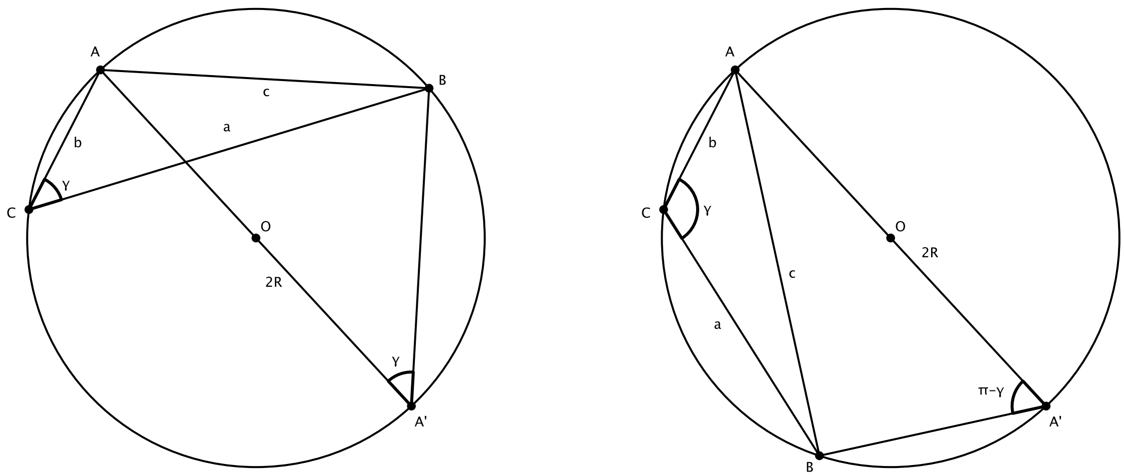


Figure 23: Triangle ABC et cercle circonscrit de rayon R.

Sur la figure (23) de gauche, l'angle en C est aigu, AA' est un diamètre du cercle et donc l'angle en B est droit.
Le théorème de l'angle inscrit dit qu'une corde (ici AB) est vue d'un point du cercle (ici C ou A') d'un même angle ou d'un angle supplémentaire.
Ainsi

$$\sin(\gamma) = \frac{c}{2R}$$

Par symétrie, le résultat est valable pour les deux autres angles α et β.
Si l'angle est obtus, la figure (23) de droite, nous donne

$$\sin(\pi - \gamma) = \frac{c}{2R} = \sin(\pi - \gamma) = \sin(\gamma)$$

on retrouve le même résultat.
On obtient ainsi le théorème du sinus:

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R}$$

Pour justifier la figure (23) de droite, on méditera sur la figure (24), l'angle en A' vaut donc $\alpha + \beta$ et comme la somme des angles du triangle ABC vaut π, on retrouve $(\pi - \gamma)$ pour l'angle en A'.

7.2 Théorème du cosinus

Sur la figure (25) de gauche (angle aigu en B), on applique le théorème de Pythagore

$$a^2 = h^2 + (c-p)^2 = b^2 + c^2 - 2c\,p = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Dans le cas d'un angle obtus en B, on a

$$a^2 = h^2 + p^2 = b^2 - (c+p)^2 + p^2 = b^2 - c^2 - 2c\,p = b^2 - c^2 - 2c(b\,\cos(\alpha) - c) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

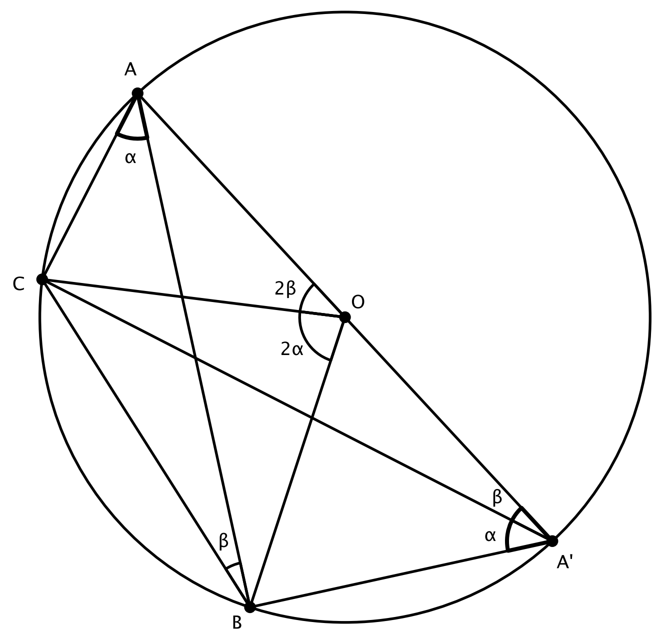


Figure 24: Triangle ABC et cercle circonscrit, angles au centre et angles inscrits.

En permutant les angles, on obtient le théorème du cosinus

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)} \qquad \boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\beta)} \qquad \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)}$$

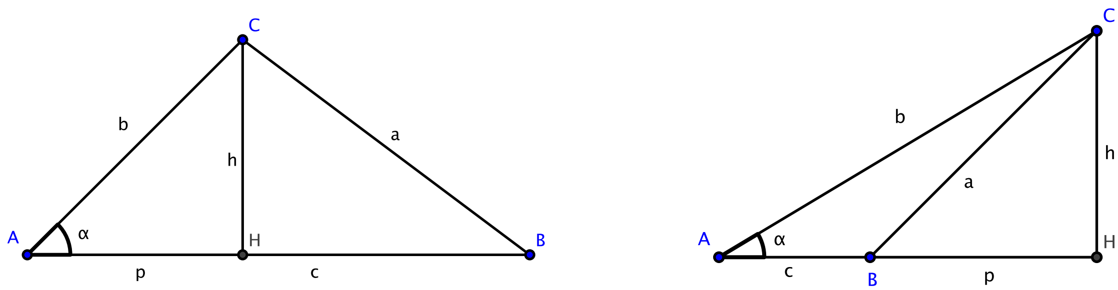


Figure 25: Triangle ABC et hauteur AH.

7.3 Somme des angles

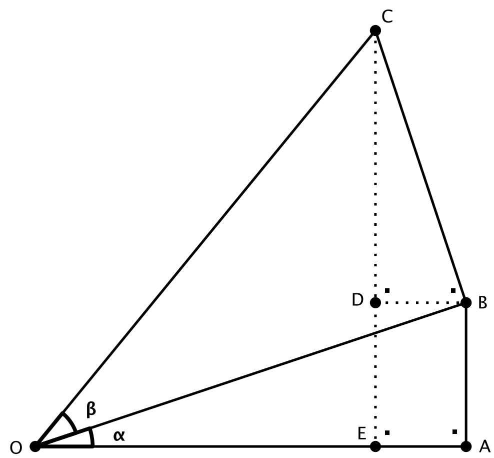


Figure 26: Triangles rectangles OAB et OBC.

Sur la figure (26) , on obtient

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{CE}{OC}=\frac{CD+DE}{OC}=\frac{CD}{OC}+\frac{DE}{OC}=\frac{CD}{OC}\frac{CB}{CB}+\frac{DE}{OC}\frac{OB}{OB}=\frac{CB}{OC}\frac{CD}{CB}+\frac{OB}{OC}\frac{DE}{OB}$$

Comme $DE=AB$, on obtient

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\beta)\cos(\alpha)+\cos(\beta)\sin(\alpha)$$

ou encore

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}$$

En changeant le signe de β, on a

$$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)}$$

En passant à l'angle complémentaire, on trouve la formule pour le cosinus:

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\beta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\beta))=$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

Et, en changeant le signe de β, on a

$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

En posant $\alpha=\beta$, on trouve les formules de l'angle double

$$\boldsymbol{\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$$

$$\boldsymbol{\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1=1-2\sin^2(\alpha)}$$