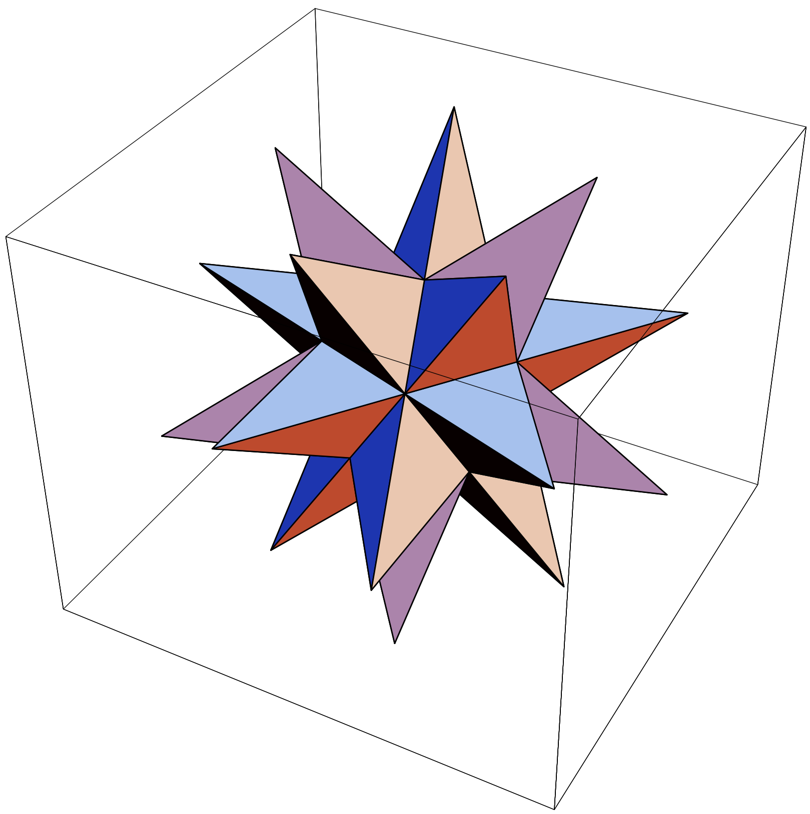
heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Vecteurs

Lang Fred[1]



[1]Version 2012

Table des matières

1 Notion de vecteurs

1.1 Définitions

Un **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est représenté par un segment orienté (ou flèche) $\overline{AB}$, A est l'**origine** ou **point d'application** du vecteur et B son **extrémité**.

- La **longueur** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\|\overrightarrow{AB}\|$ et celle de $\vec{v}$, $\|\vec{v}\|$ = v.
- La **direction** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite AB.
- Le **sens** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est celui de la demi-droite AB.

Si $A = B$, on parle de **vecteur nul** , sa longueur est nulle, sa direction et son sens sont alors indéterminés, on le note $\vec{o}$.

Deux vecteurs ayant même direction sont dits **parallèles** ou **colinéaires**.

Deux vecteurs, de même direction, peuvent avoir même sens ou sens opposé: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

On distingue les vecteurs liés, glissants et libres.

- Un vecteur lié a un point d'application bien défini
- Un vecteur glissant a un point d'application variant sur une droite
- Un vecteur libre a un point d'application quelconque

Dans la suite du cours, nous parlerons essentiellement des vecteurs libres, que nous appellerons simplement vecteurs.

Donnons deux caractérisations des vecteurs libres:

1) Deux vecteurs libres non nuls sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur. Tous les vecteurs nuls sont égaux.

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme. (fig 1)

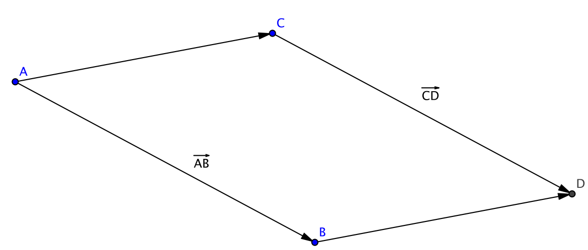


Figure 1: Les flèches $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ définissent le même vecteur

$\overrightarrow{BA}$ est le vecteur **opposé** à $\overrightarrow{AB}$, on le note - $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ = - $\overrightarrow{AB}$.

Un vecteur **unitaire** est un vecteur de longueur 1. On trouve la notation $\hat{\boldsymbol{v}}$.

1.2 Définition de la somme

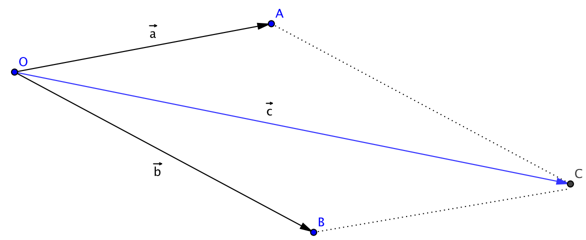


Figure 2: Somme de deux vecteurs

Parallélogramme des forces:

La **somme** de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est un troisième vecteur $\vec{c}$ défini ainsi:

On représente les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ par des flèches de même origine O, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. (fig 2)
La flèche $\overrightarrow{OC}$, diagonale du parallélogramme OACB, représente alors le vecteur somme

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

On dit aussi que $\vec{c}$ est la **résultante** de $\vec{a}$ et $\vec{b}$; $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont les **composantes** de $\vec{c}$.

Comme $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, on a la construction bout à bout :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ou encore:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

ce qu'on énonce ainsi:

Règle de Chasles (fig 3):

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}} \tag{1}$$

Remarque: Le vecteur $\vec{c}$ est indépendant du choix du point O:

Attachons les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ à une origine O'.

En translatant le parallélogramme OACB en O'A'C'B', on obtient un vecteur $\vec{c'}$ égal à $\vec{c}$.

Ainsi la somme des vecteurs est indépendante du choix du point O.

La **soustraction** est définie par l'addition de l'opposé: $\vec{a}$ - $\vec{b}$ = $\vec{a}$ + (-$\vec{b}$)

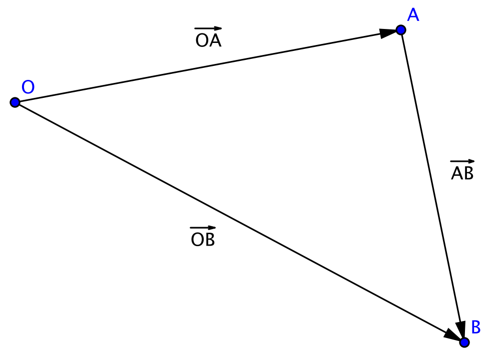


Figure 3: Règle de Chasles

1.3 Propriétés de la somme

Commutativité

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Associativité

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Elément neutre

$$\vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$$

Eléments opposés

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$$

Vérification de l'associativité (fig 4):
Disposer les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ suivant les arêtes OA, OB et OC d'un cube, les différentes diagonales donnent les différentes combinaisons des trois vecteurs.

Théorème des projections (fig 5):

Notons $\vec{v}'$ la projection du vecteur $\vec{v}$ sur une direction donnée, parallèlement à une direction donnée.

La projection de la somme est égale à la somme des projections

$$(\vec{a} + \vec{b})' = \vec{a}' + \vec{b}'$$

1.4 Produit d'un vecteur par un scalaire

Soient k un scalaire et $\vec{v}$ un vecteur.

Définissons le **produit $k\,\vec{v}$** de $\vec{v}$ par k.

$k > 0$: $k\,\vec{v}$ est représenté par une flèche de même direction et de même sens que $\vec{v}$, de longueur $||k\vec{v}|| = k||\vec{v}||$.

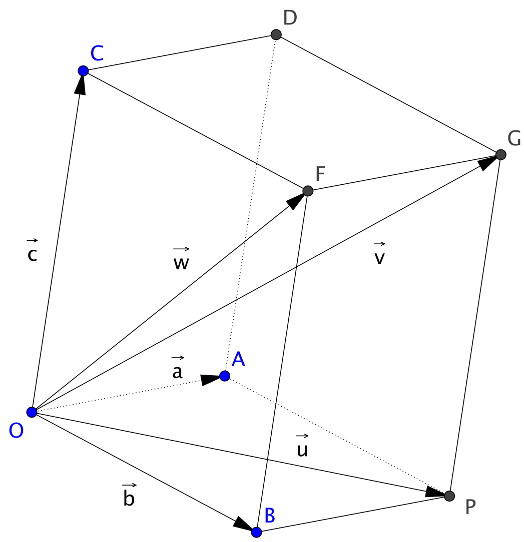


Figure 4: Associativite

$k = 0$: $k\,\vec{v} = \vec{o}$.

$k < 0$: $k\,\vec{v}$ est est représenté par une flèche de même direction que $\vec{v}$, de sens opposé à $\vec{v}$, de longueur $\|k\,\vec{v}\| = -k\,\|\vec{v}\|$.

Ainsi, dans tous les cas:

$$\|k\,\vec{v}\| = |k| \cdot \|\vec{v}\| \tag{2}$$

où $|k|$ est la valeur absolue de k.

Rappel concernant la valeur absolue:

- $|k| = +k$ si $k \geq 0$
- $|k| = -k$ si $k \leq 0$

Ainsi, $|k|$ est la partie positive de k.

$|k|$ est toujours positive ou nulle, $|k|$ est nulle si et seulement si k est nul.

Propriétés:

(I) $|n + m| \leq |n| + |m|$

(II) $||n| - |m|| \leq |n - m|$

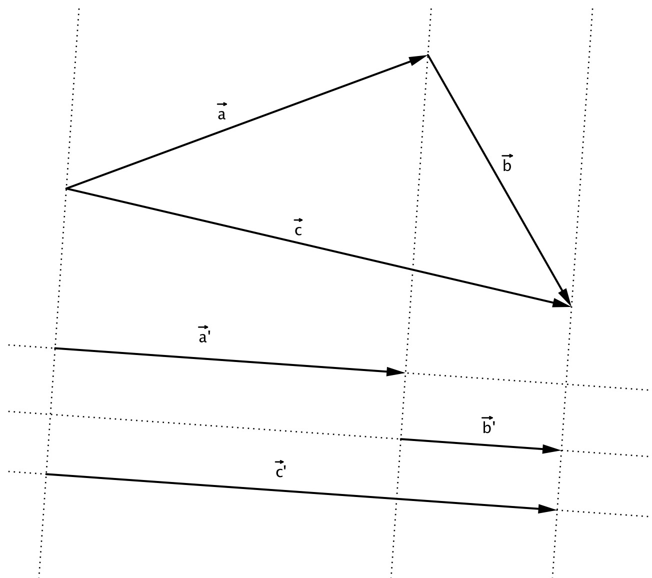


Figure 5: Projections de la somme: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{c'} = \vec{a}' + \vec{b}'$

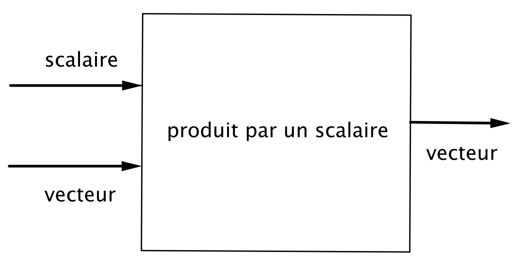


Figure 6: Entrées/sortie du produit par un scalaire.

1.5 Propriétés du produit

Distributivités

$$k\,(\vec{a} + \vec{b}) = k\,\vec{a} + k\,\vec{b}$$

$$(k + r)\,\vec{a} = k\,\vec{a} + r\,\vec{a}$$

Associativité numérique

$$(k\,r)\,\vec{a} = k(r\,\vec{a})$$

Elément neutre

$$1\,\vec{a} = \vec{a}$$

On peut donc calculer avec les vecteurs comme avec les nombres, seules la multiplication et la division par un vecteur sont interdites

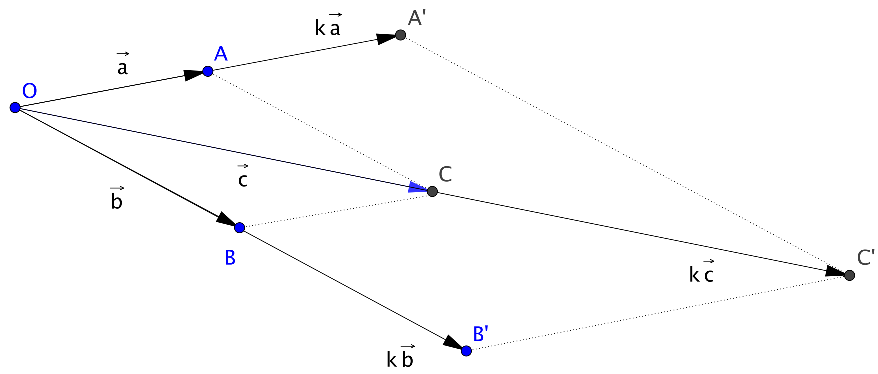


Figure 7: Distributivité de la somme par rapport au produit par un scalaire, ici 2.

Définitions
Une **combinaison linéaire** de vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, ... est une expression du type

$$\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} + \delta\,\vec{d} + ...$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres réels.

Des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, ... sont dits **linéairement dépendants** si l'un est une combinaison linéaire des autres; sinon ils sont dits **linéairement indépendants**.

Des vecteurs sont dits **coplanaires** s'ils sont représentables par des flèches situées dans un même plan.

Des propriétés précédentes, on en déduit immédiatement:

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si l'un est multiple de l'autre.
- Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si l'un s'exprime comme combinaison linéaire des deux autres.

2 Coordonnées

2.1 Plan

On se donne un système d'axes perpendiculaires, l'abscisse Ox et l'ordonnée Oy, se coupant en un point O, sur chacun des axes on prend des segments unités OI et OJ.

Les vecteurs $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ sont les vecteurs de base.

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une **base orthonormée** de l'ensemble des vecteurs du plan.

(O, I, J) est un **repère** du plan, O est l'origine du repère.

En projetant un vecteur $\vec{v}$ du plan sur les axes, on obtient la décomposition (fig (8)

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Mais, $\vec{v}_1$ étant parallèle à $\vec{i}$, il s'écrit $\vec{v}_1 = v_1 \vec{i}$, de même, $\vec{v}_2 = v_2 \vec{j}$.

Ainsi:

$$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$$

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont les **composantes vectorielles** de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

v_1 et v_2 sont les **composantes numériques** de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

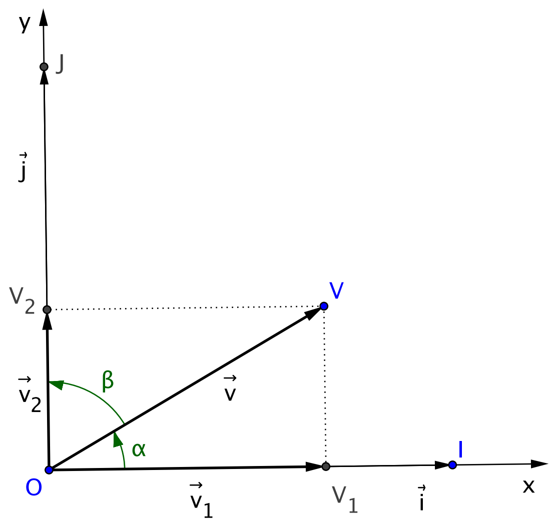


Figure 8: Composantes vectorielles d'un vecteur 2D.

Dans une base fixée, les données de v_1 et v_2 déterminent entiérement le vecteur $\vec{v}$.

On associe à $\vec{v}$ le tableau

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

appelé **vecteur-colonne** de $\vec{v}$.
Il dépend du choix de la base, mais non de celui de l'origine O.

Si on représente $\vec{v}$ par une flèche d'origine O, $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$.
Le point V a, lui, les coordonnées v_1 et v_2 qui, elles, dépendent de O.
On associe à V un tableau

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

appelé **vecteur-ligne** de V.

$$\boldsymbol{V(v_1, v_2) \;\leftrightarrow\; \vec{v} = \overrightarrow{OV} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j}} \tag{3}$$

Un vecteur étant entiérement déterminé par ses composantes, on a:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{w_1} \\ \boldsymbol{w_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1 + w_1} \\ \boldsymbol{v_2 + w_2} \end{bmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{k} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k\,v_1} \\ \boldsymbol{k\,v_2} \end{bmatrix}$$

Quelques vecteurs particuliers :

$$\vec{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La règle de Chasles permet de trouver les composantes de n'importe quel vecteur $\overrightarrow{AB}$, connaissant les coordonnées de ses extrémités $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Si $\vec{v}$ n'est pas vertical, $v_1 \neq 0$, on définit la **pente** de $\vec{v}$ par $\dfrac{v_2}{v_1}$.

Soient α et β les angles de $\vec{v}$ avec les axes Ox et Oy (fig 8), alors

$$\mathbf{tan}(\alpha) = \mathbf{cot}(\beta) = \frac{\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{v_1}} = \mathbf{pente}(\vec{\boldsymbol{v}}) \tag{5}$$

Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (non verticaux) sont colinéaires si et seulement s'ils ont mêmes pentes:

$$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \;\leftrightarrow\; \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1} \tag{6}$$

2.2 Espace

On se donne un système d'axes perpendiculaires, l'abscisse Ox, l'ordonnée Oy et la hauteur Oz se coupant en un point O, sur chacun des axes on prend des segments unités OI, OJ et OK.
Les vecteurs $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ sont les vecteurs de base.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.
(O, I, J, K) est appelé repère de l'espace, O est l'origine du repère.

Soit $\vec{v}$ un vecteur de l'espace. En le projetant sur les axes, on obtient la décomposition (fig 9):

$$\boldsymbol{\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3}$$

et

$$\boldsymbol{\vec{v} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont les **composantes vectorielles** de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
v_1, v_2 et v_3 sont les **composantes numériques** de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

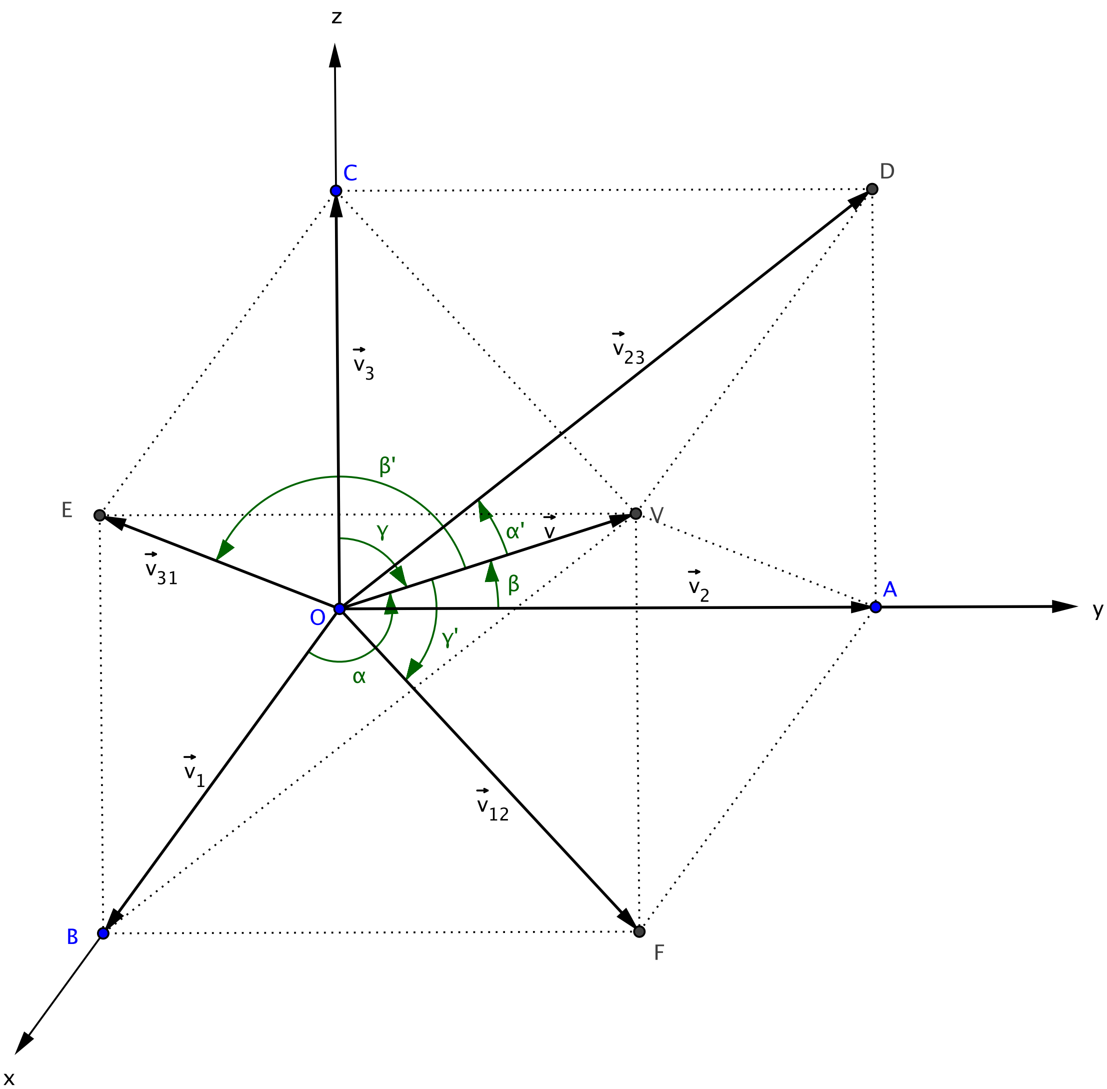


Figure 9: Composantes vectorielles d'un vecteur 3D. On a noté α, β, γ les angles de $\vec{v}$ avec les axes de référence et α', β', γ' les angles de $\vec{v}$ avec les plans de référence, ce sont les complémentaires des angles α, β, γ comme on peut le voir dans les rectangles $OCVF$, $OBVD$ et $OAVE$.

On associe à $\vec{v}$ le tableau

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

appelé vecteur-colonne de $\vec{v}$.

Si on représente $\vec{v}$ par une flèche d'origine O, $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$.

Le point V a, lui, les coordonnées v_1, v_2 et v_3. On associe à V le vecteur-ligne

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} \end{bmatrix} \text{ou} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} \end{pmatrix}$$

On a alors:

$$\boldsymbol{V(v_1, v_2, v_3) \leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{OV} = v_1\,\vec{\imath} + v_2\,\vec{\jmath} + v_3\,\vec{k}} \tag{7}$$

Et:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{v_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{w_1} \\ \boldsymbol{w_2} \\ \boldsymbol{w_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1 + w_1} \\ \boldsymbol{v_2 + w_2} \\ \boldsymbol{v_3 + w_3} \end{bmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{k} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k\,v_1} \\ \boldsymbol{k\,v_2} \\ \boldsymbol{k\,v_3} \end{bmatrix}$$

Quelques vecteurs particuliers:

$$\vec{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La règle de Chasles permet de trouver les composantes de n'importe quel vecteur $\overrightarrow{AB}$, connaissant les coordonnées de ses extrémités $A(a_1, a_2, a_3)$ et $B(b_1, b_2, b_3)$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Si $\vec{v}$ n'est pas vertical, on définit la **pente** de $\vec{v}$:

$$\mathbf{tan(\gamma') = pente(\vec{v}) = \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}} \tag{9}$$

C'est la tangente de l'angle entre la projection horizontale, $\vec{v}_{12}$, de $\vec{v}$ et $\vec{v}$.

3 Longueur d'un vecteur

3.1 Plan

La **longueur**[2] d'un vecteur $\vec{v} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j}$ se calcule aisément à l'aide du théorème de pythagore: On projette $\vec{v}$ sur l'abscisse et l'ordonnée, on obtient un triangle rectangle (fig (8).
On a ainsi:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{10}$$

La longueur de $\overrightarrow{AB}$ ou distance de A à B, $\delta(A, B)$ est donnée par:

$$\delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \tag{11}$$

Rappelons qu'un vecteur est dit unitaire si sa longueur est 1.

Si $\vec{a}$ est un vecteur non nul, il y a deux vecteurs unitaires parallèles à $\vec{a}$, ce sont $\vec{u}$ et -$\vec{u}$.
$\vec{u}$ est obtenu en divisant $\vec{a}$ par sa longueur:

$$\vec{u} = \frac{1}{a}\,\vec{a}$$

Attention à l'inégalité du triangle:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

En termes de distances, cela devient évident:

$$\delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C)$$

Il est plus court d'aller directement de A à C plutôt que de faire le détour par B. (Sauf si B est aligné et entre A et C, auquel cas l'égalité est vérifiée).

Evidemment

$$\|\vec{a}\| \geq 0$$

et

$$\|\vec{a}\| = 0 \leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$$

Deux vecteurs sont dits **perpendiculaires** (ou **orthogonaux**) s'ils sont représentables par des flèches perpendiculaires.
Le vecteur nul est ici considéré comme étant perpendiculaire à tout vecteur.

3.2 Espace

La longueur d'un vecteur est aussi donnée par Pythagore (fig (9):

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{12}$$

La longueur de $\overrightarrow{AB}$ ou distance de A à B, $\delta(A, B)$ est donnée par:

[2] ou norme, amplitude, module.

$$\delta(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2} \tag{13}$$

4 Produit scalaire

4.1 Définition

Nous allons maintenant nous occuper d'angles entre vecteurs.

L'angle entre deux vecteurs se mesure en représentant ceux-ci par des flèches de même origine et en mesurant l'angle des demi-droites indiquées par ces vecteurs, il est donc compris entre 0 et 180 degrés.

Notons θ l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. (fig 10)
Si nous représentons ceux-ci par des flèches $\vec{a} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, la somme est $\vec{a}+\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$.
Considérons le triangle ABC, l'angle γ en C est égal à $\pi - \theta$.

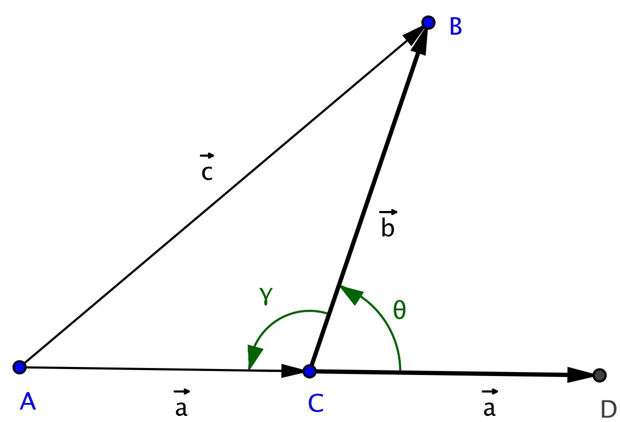


Figure 10: L'angle entre deux vecteurs.

Le théorème du cosinus donne:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\theta)$$

La quantité $ab\cos(\theta)$ est positive, nulle ou négative selon que θ est aigu, droit ou obtu.

On l'appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et on la note $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||\cos(\theta)} \tag{14}$$

En particulier le produit scalaire de deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au cosinus de leur angle.

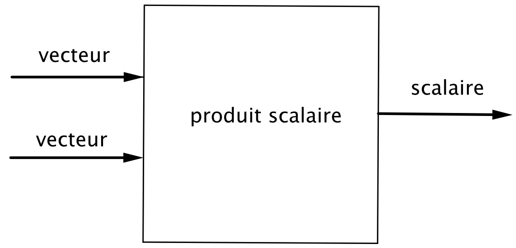


Figure 11: Entrées/sortie du produit scalaire.

4.2 Propriétés du produit scalaire

1. **Commutativité**
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

2. **Distributivité**
$$\vec{v} \cdot (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + \vec{v} \cdot \vec{w}_2$$

3. **Associativité numérique**
$$(k\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w}) = k(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

4. **Norme**
$$\vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||^2$$

5. **Parallèlisme**

   ▹ Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont de même direction et de même sens alors $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}||\ ||\vec{w}||$.

   ▹ Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont de même direction et de sens opposé alors $\vec{v} \cdot \vec{w} = -||\vec{v}||\ ||\vec{w}||$.

6. **Perpendicularité**
$$\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0} \tag{15}$$

7. **Angles** L'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est

   ▹ aigu $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

   ▹ obtu $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

Remarques

▹ En général, il n'y a pas d'associativité!
$$\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

▹ **Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre** (ou scalaire).

▹ **Il n'y a pas de division de vecteurs**.

Théorème

- ▹ Dans le plan
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \tag{16}$$

- ▹ Dans l'espace
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{17}$$

5 Projections

Nous allons projeter le vecteur $\vec{a}$ perpendiculairement sur le vecteur $\vec{b}$.
Appelons $\vec{a}_{/\!/}$ le vecteur projeté.
Représentons ces vecteurs par des flèches: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{a}_{/\!/} = \overrightarrow{OP}$.

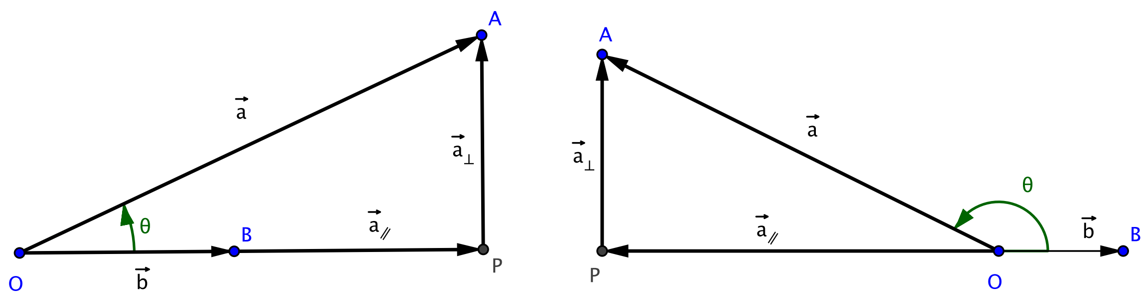


Figure 12: Projections d'un vecteur.

Notons $\vec{u}$ le vecteur unitaire parallèle et de même sens que $\vec{b}$.

$$\vec{u} = \frac{1}{||\vec{b}||}\,\vec{b}$$

La figure (12) nous donne alors facilement la composante parallèle de $\vec{a}$:

$$\vec{a}_{/\!/} = (\vec{a} \cdot \vec{u})\;\vec{u} \tag{18}$$

et

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_{/\!/} \tag{19}$$

est la composante de $\vec{a}$ orthogonale à $\vec{b}$.

6 Produit vectoriel

6.1 Orientation

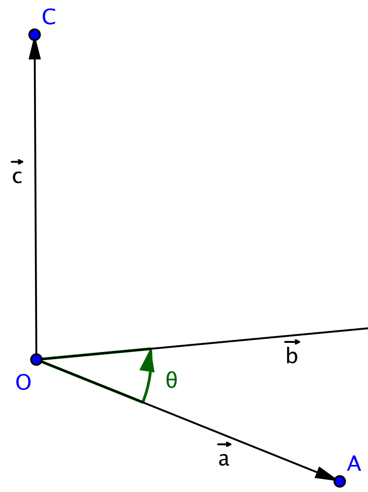


Figure 13: Base directe.

Trois vecteurs de l'espace forment une base s'ils ne sont pas coplanaires.
Une base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est **directe** ou **indirecte**.

Différents critères permettent de distinguer une base directe:

- Un observateur, la tête en C et les pieds dans le plan OAB, le bras droit dirigé vers A, a le bras gauche dirigé vers B.
- La rotation amenant $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ fait avancer le tire-bouchon dans la direction de $\vec{c}$.
- En serrant les doigts de la main droite, et en amenant $\vec{a}$ en $\vec{b}$, le pouce indique $\vec{c}$.
- La direction d'avancement d'une vis placée en O dans la direction et le sens de $\vec{c}$ indique une rotation de $\vec{a}$ vers $\vec{b}$.
- **Règle des trois doigts**

  Si le pouce de la main droite indique la direction $\vec{a}$, l'index celle de $\vec{b}$, alors le majeur donne la direction de $\vec{c}$.

Remarques

- Etant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ perpendiculaires, il n'existe que deux bases orthonormées admettant $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme premiers vecteurs de base:

  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ et $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c})$, l'une est directe et l'autre indirecte.
- Toute rotation préserve l'orientation, toute symétrie plane et centrale l'inversent. [3]

[3] Une symétrie axiale est une rotation de 180°.

- Si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est directe, alors
  - $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$, $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$, $(-\vec{a}, -\vec{b}, \vec{c})$, $(-\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$ le sont aussi (rotations de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$) et
  - $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$, $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$, $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$, $(-\vec{a}, -\vec{c}, -\vec{b})$ sont indirectes. (symétries de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$)

6.2 Définition

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ se note $\boldsymbol{\vec{a} \wedge \vec{b}}$, c'est un vecteur défini ainsi:

- Direction: perpendiculaire aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$
- Sens: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ est un repère direct
- Longueur: $ab\sin(\theta)$, où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
  C'est-à-dire l'aire du parallélogramme de côtés $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèles, le sinus est nul, on prend alors comme définition $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{o}$.

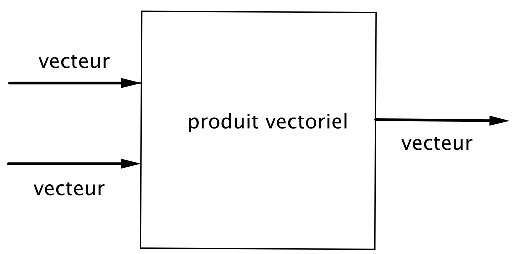


Figure 14: Entrées/sortie du produit vectoriel.

Exemple:

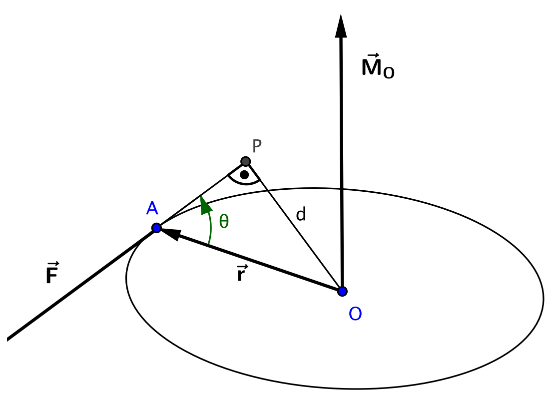


Figure 15: Moment d'une force $\vec{M}_O$, $d = r\sin(\theta)$.

En mécanique, le **moment d'une force** $\vec{F}$ appliquée au point A, par rapport à un point O, est défini par

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{20}$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ est le vecteur "bras de levier". (Figure 15)

La norme du moment est donc

$$\|\vec{M}_O\| = \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot \sin(\theta)$$

6.3 Propriétés du produit vectoriel

1. Si $\vec{a} \perp \vec{b}$ alors $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$
2. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
3. $\vec{a} \wedge k\,\vec{b} = k\,\vec{a} \wedge \vec{b}$
4. $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
5. $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{o}$
6. Relativement à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit vectoriel des vecteurs

   $$\vec{a} = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$$

   et

   $$\vec{b} = b_1\,\vec{i} + b_2\,\vec{j} + b_3\,\vec{k}$$

   est donné par

   $$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k} \tag{21}$$

   autrement dit:

   $$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{b_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_2b_3 - a_3b_2} \\ \boldsymbol{a_3b_1 - a_1b_3} \\ \boldsymbol{a_1b_2 - a_2b_1} \end{bmatrix}$$

Une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est caractérisée par les 9 conditions:

$$\begin{array}{lclclcl} \vec{i} \wedge \vec{i} & = & \vec{j} \wedge \vec{j} & = & \vec{k} \wedge \vec{k} & = & \vec{o} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} & = & -\vec{j} \wedge \vec{i} & = & \vec{k} & & \\ \vec{k} \wedge \vec{i} & = & -\vec{i} \wedge \vec{k} & = & \vec{j} & & \\ \vec{j} \wedge \vec{k} & = & -\vec{k} \wedge \vec{j} & = & \vec{i} & & \end{array}$$

Remarque

En général, il n'y a pas d'associativité!:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$$

7 Déterminants

On introduit pour alléger l'écriture la notion de déterminant.

n = 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

n = 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

8 Produit mixte

8.1 Définition du produit mixte

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

s'appelle le **produit mixte** de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

C'est un **nombre** qui se note

$$\boldsymbol{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}} \tag{22}$$

8.2 Propriétés du produit mixte

1. $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants (autrement dit coplanaires) si et seulement si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.
2. $$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$
   Ce qui justifie la notation ci-dessus.
3. $$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$$
   Autrement dit une permutation cyclique ne change rien, une transposition change le signe.
4. **$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ représente le volume orienté du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$.**
   Le signe étant + ou − selon que le triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est direct ou non.
5. $$k(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (k\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, k\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, k\vec{c})$$

6.
$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

7. Relativement à une base orthonormée directe, le produit mixte s'écrit
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

Vérification de la propriété 4:
Le volume du parallélépipède est donné par le produit de la base et de la hauteur OH. (Figure 16)
Notons $\overrightarrow{OP} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.
La base est égale à $OP = ||\overrightarrow{OP}||$ et la hauteur est la projection du vecteur $\vec{c}$ sur $\overrightarrow{OP}$.
Ainsi
$$OH = \frac{\vec{c} \cdot \overrightarrow{OP}}{||\overrightarrow{OP}||}$$
et le volume vaut
$$OH \cdot OP = \vec{c} \cdot \overrightarrow{OP} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

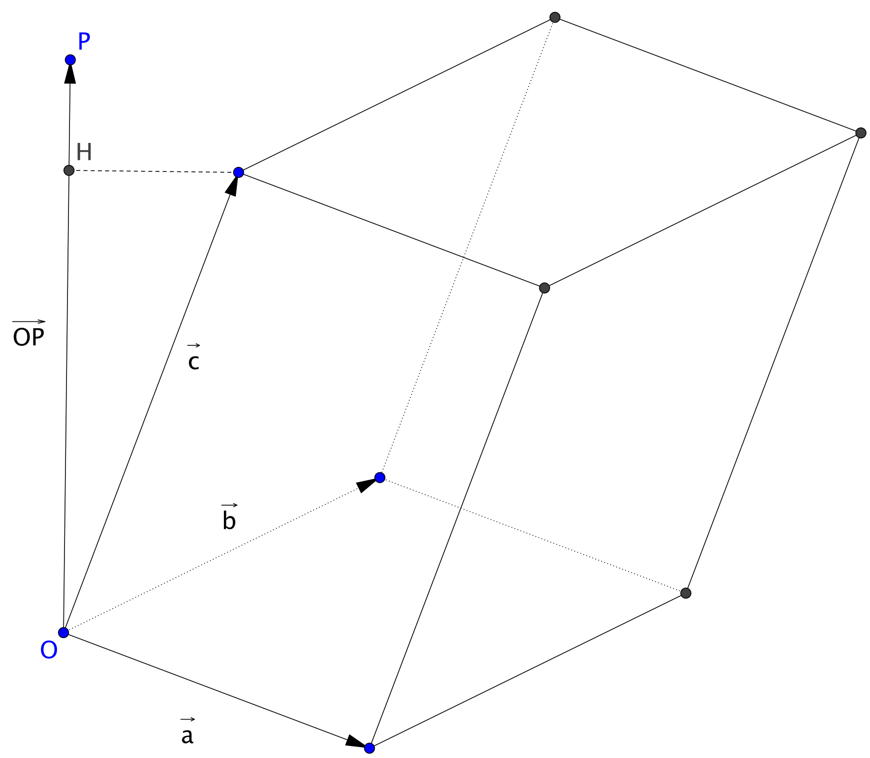


Figure 16: Volume du parallélèpipède.

Volume du tétraèdre:

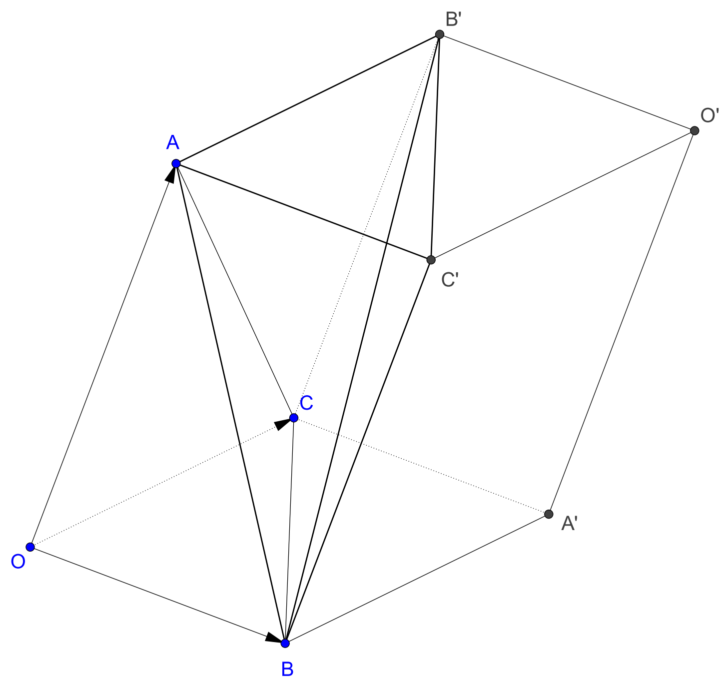


Figure 17: Volume du tétraèdre.

Le parallélépipède $OABCO'A'B'C'$ est divisé en 6 tétraèdres, dont 3 sont représentés sur la figure 17: $OABC, B'ABC, C'ABB'$.
Ils ont tous trois le même volume:
1) $OABC$ et $B'ABC$ ont ABC pour base commune et si O_1 désigne le pied de la hauteur issue de O sur le plan (ABC) et B'_1 celui de la hauteur issue de B' sur le même plan, alors les triangles OCO_1 et $B'AB'_1$ sont égaux, donc les hauteurs aussi.

2) Le tétraèdre $B'ABC$ est égal à $CABB'$, il a donc la même base que $C'ABB'$, le même raisonnement que sous 1) montre qu'ils ont aussi même hauteur.

Ainsi le volume du tétraèdre $OABC$ est le sixième de celui du parallélépipède construit sur ses arêtes, et le tiers de celui du prisme $OBCAC'B'$ construit sur ses arêtes.
Donc le volume du tétraèdre est

$$VOLUME(OABC) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \tag{23}$$

Moment axial:

En mécanique, on définit le **moment axial d'une force** $\vec{F}$ par rapport à un axe Δ ainsi:
Si l'axe est donné par un point P et un vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ et que la force est appliquée au point A, le moment axial est donné par le produit mixte (voir fig. 18a):

$$M_\Delta = \overrightarrow{M}_P \cdot \vec{u} = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{PA} \cdot \vec{F} \wedge \vec{u} \tag{24}$$

Il a les propriétés suivantes:

1. Ce moment ne dépend pas du choix du point P sur l'axe
2. Il ne dépend que de la composante de $\vec{F}$ normale à l'axe (voir fig. 18b)
3. C'est la composante selon l'axe Δ du moment de la force par rapport à un point de l'axe
4. Le moment axial d'une force est égal au moment axial de la composante normale à l'axe de la force.

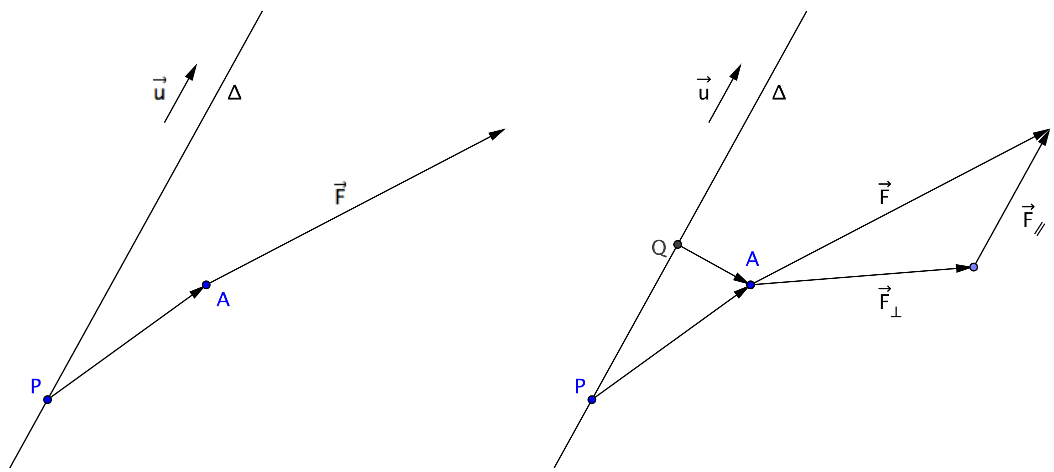


Figure 18: Moment axial.

Les démonstrations sont laissées en exercice.

9 Double produit vectoriel

La formule de Gibbs permet de décomposer un double produit vectoriel:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \tag{25}$$

Variante:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} \tag{26}$$

Cas particulier: $\vec{c} = \vec{b} = \vec{u}$:
Nous trouvons alors

$$(\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{a})\vec{u} - \vec{a}$$

ou

$$\vec{a} = (\vec{u} \cdot \vec{a})\vec{u} - (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} \tag{27}$$

Nous avons la décomposition de $\vec{a}$ en composantes parallèle et perpendiculaire à $\vec{u}$. Voir (19).

10 Exercices

Exercice 1
Sur l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O de la figure 19, représenter le vecteur $\overrightarrow{DC}$ par différentes flèches, faire de même avec $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{OA}$.

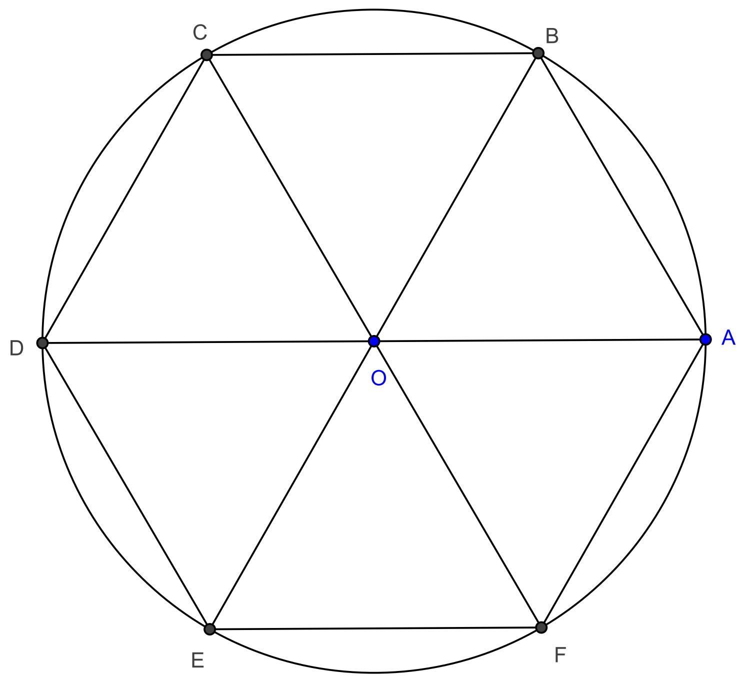


Figure 19: Hexagone régulier.

Exercice 2
Même exercice, sur le parallélépipède de la figure 20, avec les vecteurs $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{EC}$.

Exercice 3
Même exercice, sur le prisme de base hexagonale régulière de la figure 21, O et P sont les centres des bases, avec les vecteurs $\overrightarrow{LP}$, $\overrightarrow{LG}$, $\overrightarrow{LI}$, $\overrightarrow{LO}$, $\overrightarrow{GJ}$.

Exercice 4
Sur la figure 19, donner la somme de $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{OE}$; $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{OD}$.

Exercice 5
Sur la figure 20, donner la somme de $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FH}$.

Exercice 6
Sur la figure 21, donner la somme $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{DC}$ et de $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{LP}$.

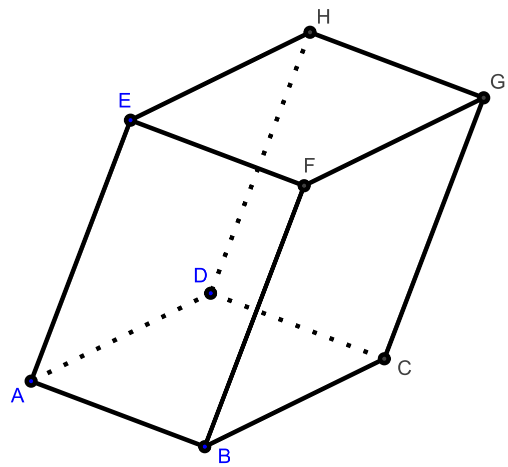


Figure 20: Paralélèpipéde.

Exercice 7
A, B, C, D, E étant des points quelconque, réduire le plus possible:

$\vec{a} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ $\quad$ $\vec{b} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$ $\quad$ $\vec{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$

$\vec{d} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$ $\quad$ $\vec{e} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

Exercice 8
Sur la figure 20, exprimer les vecteurs suivants à l'aide des lettres A, B, C, D, E, F, G, H:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$ $\quad$ $\vec{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BA}$ $\quad$ $\vec{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

$\vec{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$ $\quad$ $\vec{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$ $\quad$ $\vec{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$

Exercice 9
Sur la figure 20, on pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{w}$.
Exprimer en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, les vecteurs

$$\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{BG},\ \overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{BH},\ \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CH},\ \overrightarrow{CG},\ \overrightarrow{CE}$$

Exercice 10
Soit une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme (fig 22).
On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AS} = \vec{w}$.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CA}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Exercice 11
On donne deux points A et B. Construire les points K, L, N, P tels que
$\overrightarrow{KA} = 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{LA} = -2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$.

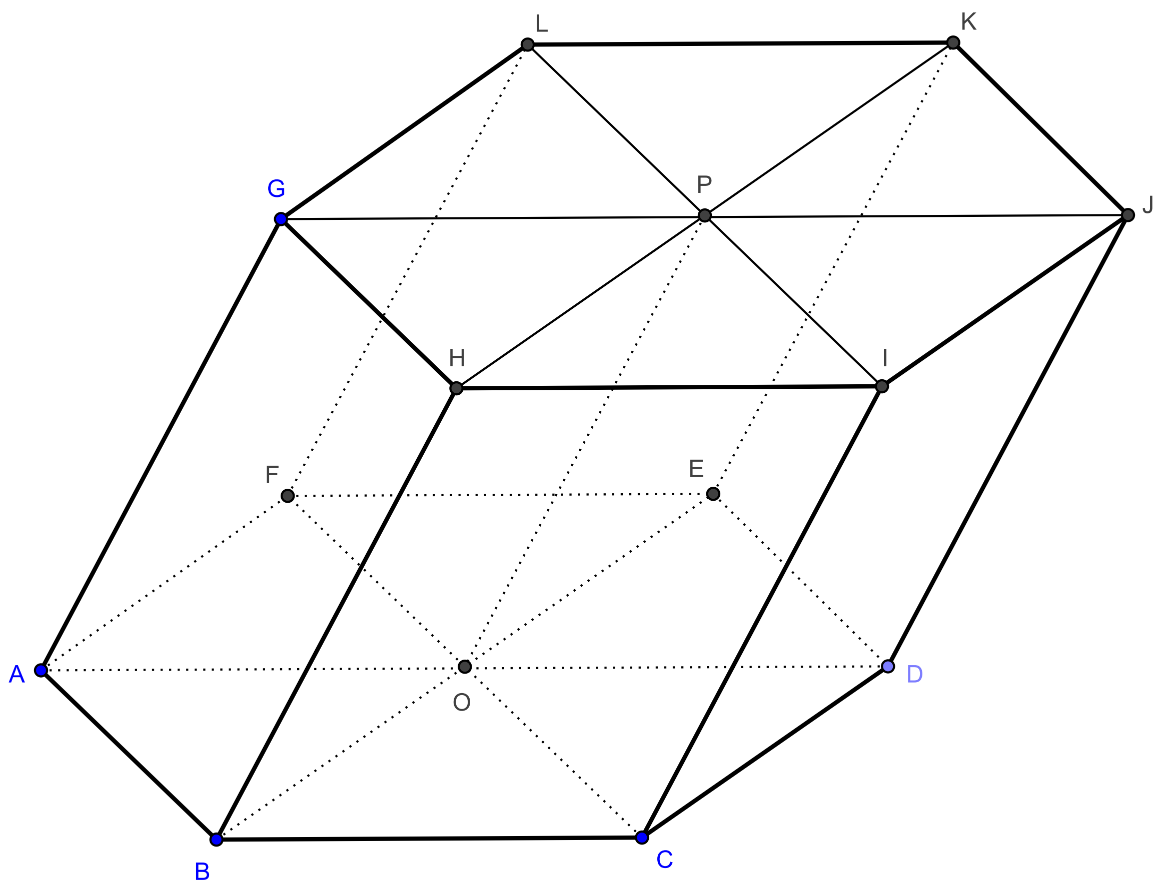


Figure 21: Prisme de base hexagonale régulière.

Exercice 12
On donne deux points A et B. Construire les points P, Q tels que
$\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{QA} = -2\overrightarrow{QB}$.

Exercice 13
On donne deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Déterminer un vecteur $\vec{x}$ tel que

$$\frac{1}{3}(2\vec{x} + \vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{x} + 2\vec{a} - 3\vec{b})$$

Exercice 14
Sur l'hexagone de la figure 19, construire les vecteurs suivants, pour autant que les expressions aient un sens:

$3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DE}$	$7\overrightarrow{CA} + 1$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}$
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FE}$	$\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EE}$	$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}$

Exercice 15
Soit le parallèlépidède de la figure 20. Les triplets suivants de vecteurs sont-ils coplanaires? Si oui,

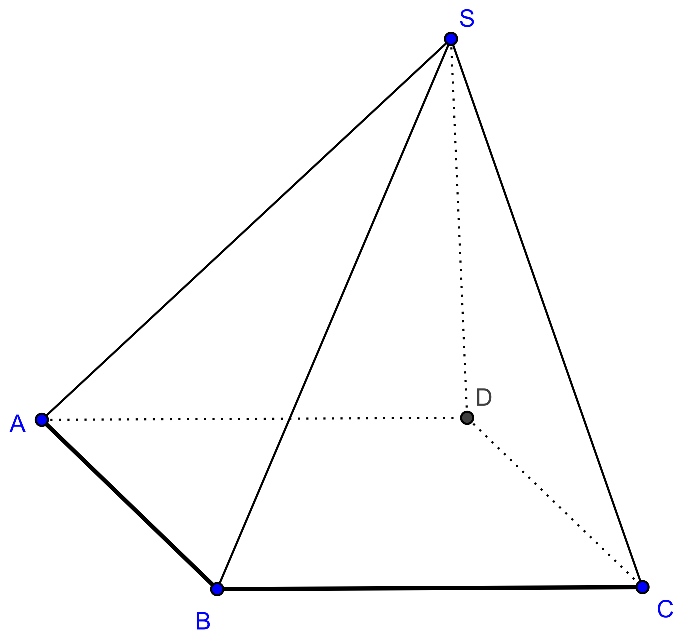


Figure 22: Pyramide de base en forme de parallélogramme.

exprimer l'un comme combinaison linéaire des deux autres.

$\overrightarrow{GH},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{DG}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BF},\ \overrightarrow{EH},\ \overrightarrow{CD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{EG},\ \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DF},\ \overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{GH}$

Exercice 16
Même exercice avec le prisme de la figure 21:

$\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{BC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{LG}, \overrightarrow{ID}, \overrightarrow{KB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{JD}, \overrightarrow{HI}$

Exercice 17
Soient

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Déterminer les composantes des vecteurs suivants:

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$ $\qquad$ *b)* $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ $\qquad$ *c)* $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$.

Exercice 18
Soient

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 12 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Calculer les nombres α *et* β *de sorte que* $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$.

Exercice 19
Soient
$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{h} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \end{bmatrix}$,

$\vec{j} = \begin{bmatrix} -1/9 \\ 1/3 \end{bmatrix}$, $\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}$. *Déterminer les ensembles de vecteurs colinéaires.*

Exercice 20
Soient les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Déterminer un nombre réel α *et un vecteur* $\vec{v}$ *colinéaire à* $\vec{a}$ *tels que*

$$\vec{v} + \alpha \vec{b} = \vec{c}$$

Exercice 21
(paquet cadeau)
On considère un cube $ABCDEFGH$ *de centre* O *(Figure 23).*
On emballe ce cube à l'aide de trois ficelles passant par les milieux des faces $IJKLMN$.
(I *est le milieu de la face* $ABFE$, J *celui de* $BCGF$ *et* M *celui de* $ABCD$*).*
Donner les coordonnées des sommets du cube, des milieux des faces et des milieux des arêtes dans le repère $OIJN$ *.*
Donner, par leurs vecteurs-colonnes, les images des vecteurs de base $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{ON}$ *par les transformations suivantes:*

1. *Symétrie centrale de centre* O.
2. *Symétries axiales d'axes* OI, OJ, ON.
3. *Symétries planes de plans* OIJ, OJN, OIN.
4. *Rotations de* ± 90 *degrés d'axes* OI, OJ, ON.
5. *Rotations de* ± 120 *degrés d'axes* OF, OA.

Exercice 22
On donne les vecteurs suivants:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 18 \\ -11 \end{bmatrix}, \vec{d} = \begin{bmatrix} 35 \\ 14 \\ -10 \end{bmatrix}, \vec{e} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Calculer les composantes des vecteurs

$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{d}$, $\vec{v} = -\vec{c} + 3\vec{e}$, $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c} + 2\vec{d}$

b) Montrer que $\vec{a}$, $\vec{b}$ *et* $\vec{c}$ *sont coplanaires.*

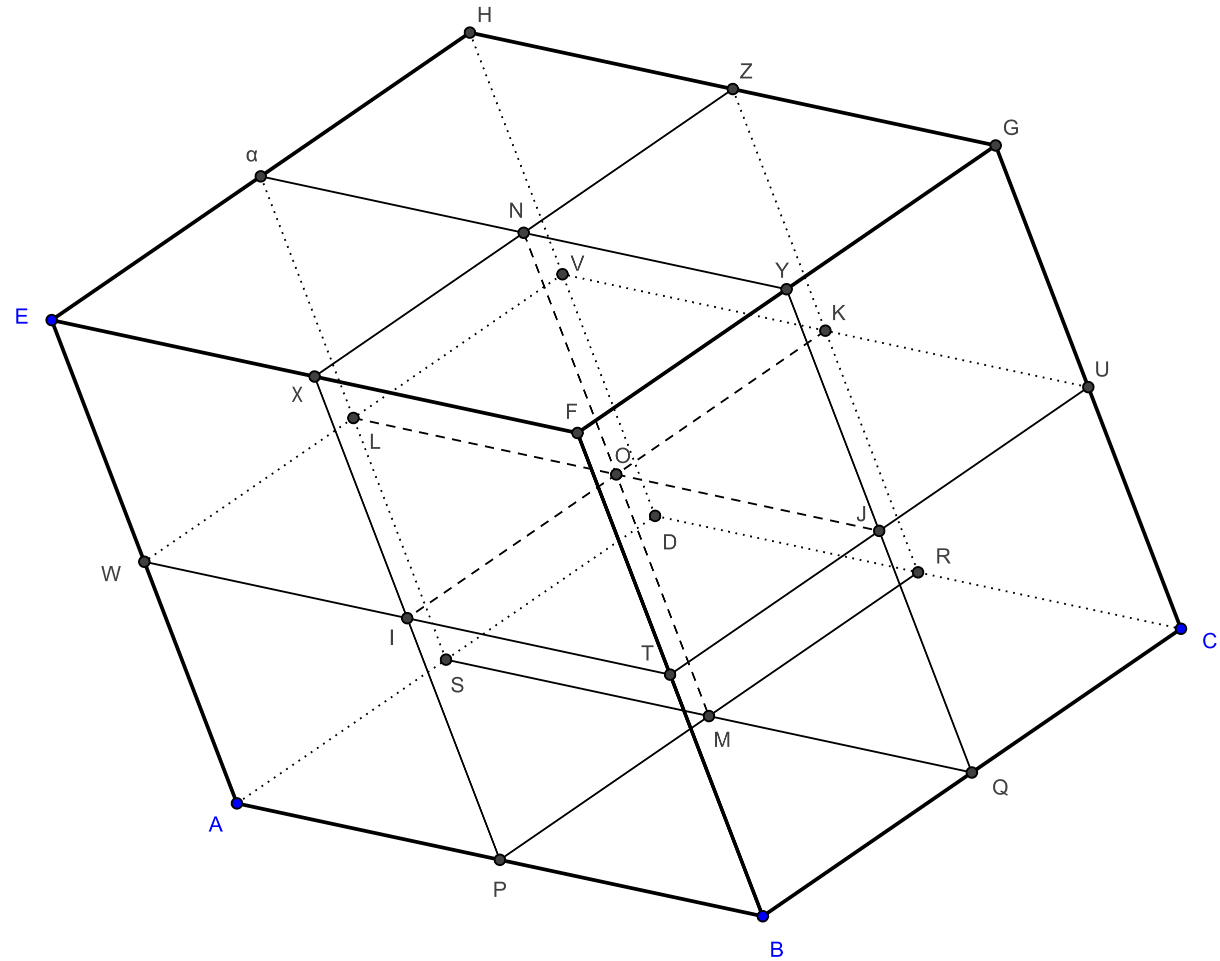


Figure 23: Le paquet cadeau.

Exercice 23
On donne $A(5,2)$, $B(6,-3)$, $C(7,8)$, $D(3,8)$, $E(5,-6)$, $F(-1;36)$.
Les points A, B, C *sont-ils alignés ?*
Les points D, E, F *sont-ils alignés ?*

Exercice 24
On donne deux points A *et* B, *dont* M *est le milieu.*

1. *Exprimer* $\overrightarrow{OM}$ *comme combinaison linéaire de* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$.
2. *Soient* $A(a_1,a_2)$ *et* $B(b_1,b_2)$, *donner les coordonnées de* M. *(Utiliser le résultat précédent).*
3. *Soient* $A(5,4)$ *et* $B(-1,6)$. *Calculer* M.

Exercice 25
On donne trois points A, B *et* C.
Soit G *le centre de gravité du triangle* ABC.

Sachant que G est situé aux deux tiers des médianes, exprimer $\overrightarrow{OG}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.
En déduire une formule donnant les coordonnées de G en fonction de celles de A, B et C.

Exercice 26
Deux masses n et m sont placées aux extrémités A et B d'une barre horizontale rigide.
Le centre de masse G est le point d'équilibre de la barre.

1. *Exprimer la condition d'équilibre à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GB}$.*
2. *Soit O un point origine du plan, exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{OB}$.*

Exercice 27
Un bateau se déplace successivement 8 km au nord, 20 km au nord-ouest, 12 km à 30 degrés au sud-ouest (mesurés depuis le sud) et 6 km au sud-est.
Déterminer son changement moyen de position, c'est-à-dire donner la longueur et la direction du vecteur allant du point de départ au point d'arrivée.

Exercice 28
1. *Calculer la longueur des vecteurs suivants:*
   $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{d} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$,
2. *Calculer les composantes d'un vecteur unitaire de même direction et de même sens que chacun des vecteurs précédents.*

Exercice 29
Démontrer que les vecteurs suivants sont unitaires:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Exercice 30
Soit O, A, B trois points non alignés, exprimer à l'aide de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{OB}$ des vecteurs parallèles aux deux bissectrices de l'angle $\angle AOB$.
A l'aide du produit scalaire, vérifier que celles-ci sont perpendiculaires.

Exercice 31
On donne un triangle ABC par $A(2,1)$, $B(5,5)$ et $C(0,-7)$. Calculer le périmètre de ce triangle.

Exercice 32
Soit $A(3,1)$, $B(9,5)$, $C(11,2)$ et $D(5,-2)$. Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 33
Soit $A(8,-2)$, $B(6,2)$, $C(6,-6)$ et $P(3,-2)$. Montrer que les points A, B, C sont sur un cercle de centre P.

Exercice 34
Calculer la longueur des vecteurs suivants:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \vec{d} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ \pi \end{bmatrix}, \ \vec{e} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Exercice 35
Calculer la distance des points A et B:

1. $A(5, -3, 1), \ B(3, 0, 9)$
2. $A(0, 0, 1), \ B(6, 6, 7)$

Exercice 36
Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants:

1. $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$
2. $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
3. $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3/4 \end{bmatrix}$
4. $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$
5. $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$
6. $\vec{a} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$.

Quels sont les couples de vecteurs perpendiculaires ?
Trouver trois vecteurs perpendiculaires à $\vec{b}$ dans l'exercice 4).

Exercice 37
Calculer x de sorte que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient perpendiculaires:

$$\vec{a} = x\vec{i} + 2\vec{j} \ \text{ et } \ \vec{b} = -5\vec{i} + 6\vec{j}$$

Exercice 38
Soient $A(1, -2), \ B(13, 2), \ C(2, 5), \ D(5, -4)$.
Montrer que la droite AB est perpendiculaire à la droite CD.

Exercice 39
Calculer les produits scalaires suivants:
$\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{b}\cdot\vec{a},\ \vec{a}\cdot\vec{c},\ \vec{b}\cdot\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{d}),\ (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a},\ (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c},\ (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d},\ (\vec{c}\cdot\vec{d})\vec{b},\ (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\cdot\vec{d})$

où

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}8\\-9\\1\end{bmatrix}\quad \vec{b}=\begin{bmatrix}5\\-2\\3\end{bmatrix}\quad \vec{c}=\begin{bmatrix}1\\0\\-8\end{bmatrix}\quad \vec{d}=\begin{bmatrix}3\\6\\3\end{bmatrix}$$

Exercice 40
Montrer que les vecteurs $\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\-3\\4\end{bmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{bmatrix}8\\2\\-1/2\end{bmatrix}$ *sont perpendiculaires.*

Exercice 41
Les droites AB et CD *sont-elles perpendiculaires ?* $A(8,-1,3),\ B(11,11,5),\ C(4,1,-1),\ D(6,0,2)$.

Exercice 42
Démontrer que les composantes v_1, v_2, v_3 *d'un vecteur* $\vec{v}$ *sont données par les produits scalaires avec les vecteurs de base respectifs:*

$$v_1=\vec{v}\cdot\vec{i},\ v_2=\vec{v}\cdot\vec{j},\ v_3=\vec{v}\cdot\vec{k}$$

Exercice 43
Calculer la longueur de la projection de $\vec{a}$ *sur* $\vec{b}$*:*

1.
$$\vec{a}=-7\vec{i}-3\vec{j}\qquad \vec{b}=-3\vec{i}+4\vec{j}$$

2.
$$\vec{a}=\frac{3}{4}\vec{i}+\frac{5}{7}\vec{j}\qquad \vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}$$

Exercice 44
Calculer les composantes et la longueur de la projection de $\vec{a}$ *sur* $\vec{b}$*:*

1.
$$\vec{a}=8\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}\qquad \vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

2.
$$\vec{a}=4\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}\qquad \vec{b}=-3\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$$

Exercice 45
On donne le triangle $A(1,2),\ B(5,4),\ C(3,6)$.
Calculer

- ▹ *la longueur de la projection de* AC *sur* AB
- ▹ *la longueur de la hauteur issue de* C.
- ▹ *l'aire du triangle* ABC
- ▹ *les coordonnées du pied* C' *de la hauteur issue de* C

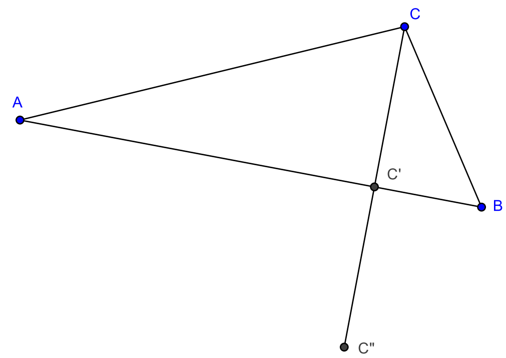


Figure 24: Symétrique du point C.

- *les coordonnées du symétrique C'' de C relativement à AB.*

Exercice 46

- *Calculer l'angle entre les vecteurs $2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $-\vec{i} + 2\vec{j}$.*
- *Calculer l'angle entre les vecteurs $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et $-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.*

Exercice 47

Un poids pendant à un fil est poussé de côté par une force horizontale jusqu'à ce que le fil fasse un angle de 45° avec la verticale.
Trouver la force horizontale et la tension dans le fil en fonction du poids P.

Exercice 48

Soit $\vec{p} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.
Calculer les cosinus des angles α, β, γ, entre $\vec{p}$ et les axes de coordonnées, en fonction de x, y, z et $p = \|\vec{p}\|$.
Ces cosinus sont les **cosinus directeurs** *de $\vec{p}$.*
Prouver que

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Que représente géométriquement le vecteur $\cos(\alpha)\,\vec{i} + \cos(\beta)\,\vec{j} + \cos(\gamma)\,\vec{k}$?

Soit $\vec{q}$, un deuxième vecteur, de cosinus directeurs $\cos(\alpha'), \cos(\beta')$ et $\cos(\gamma')$.
Soit θ l'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{q}$, exprimer $\cos(\theta)$ en fonction des cosinus directeurs de $\vec{p}$ et $\vec{q}$.

Exercice 49

Soit $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ et $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.
Décomposer $\vec{a}$ en composantes parallèle et perpendiculaire à $\vec{b}$.

Exercice 50

Examinez si chaque expression a un sens. Si non, dites pourquoi, si oui le résultat est-il un scalaire ou un vecteur?

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$	$\vec{a} \wedge (\vec{b} \cdot \vec{c})$	$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$
$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \wedge \vec{c}$	$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \wedge (\vec{c} \cdot \vec{d})$	$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})$

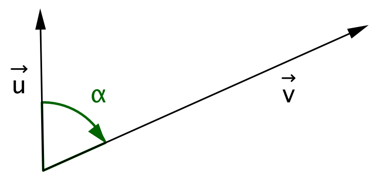


Figure 25: $\|\vec{u}\| = 5, \|\vec{v}\| = 10, \alpha = 60°$

Exercice 51
Calculez $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ et dites si $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pointe vers l'intérieur de la page ou vers l'extérieur de celle-ci. (Fig 25)

Exercice 52
Même question. (Fig 26)

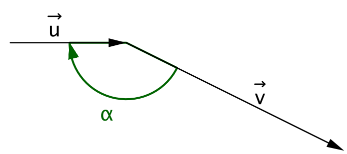


Figure 26: $\|\vec{u}\| = 6, \|\vec{v}\| = 8, \alpha = 150°$

Exercice 53
La pédale d'un vélo est enfoncée avec une force de $60\,N$. (Fig 27).
Le bras du pédalier mesure $18\,cm$. Calculez la norme du moment de torsion par rapport à P.

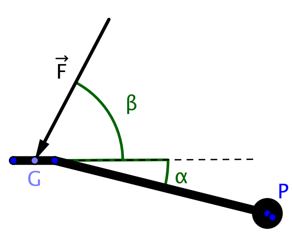


Figure 27: $\|\vec{F}\| = 60\,N$, $\alpha = 10°$, $\beta = 70°$

Exercice 54
Calculez le vecteur moment de torsion et sa norme par rapport à P d'une force F appliquée en A comme le montre la figure (fig 28).
Traités deux cas, calcul littéral et numérique:

1. *La force est dans le plan Oyz.*
2. *La force est dans le plan Oxy.*

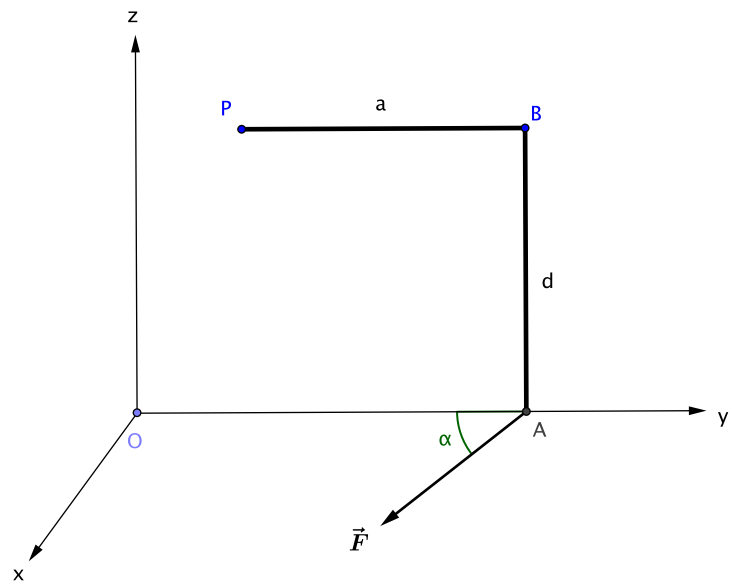


Figure 28: $\|\vec{F}\| = 36\,N,\ \alpha = 30°, a = 4\,m,\ d = 4\,m$

Exercice 55
Effectuer le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 56
Déterminer deux vecteurs unitaires orthogonaux à la fois aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Exercice 57
Calculer l'aire du parallélogramme de sommets $A(0,1), B(3,0), C(5,-2)$ et $D(2,-1)$.

Exercice 58
Calculer l'aire du triangle de sommets $A(1,0,0), B(0,2,0)$ et $C(0,0,3)$.

Exercice 59
Sur la figure 21, supposons que OP soit perpendiculaire au plan de la base et que $OD = OP$, plaçons un système d'axes d'origine O de sorte que $\vec{j} = \overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OP}$.
Calculer les angles suivants:

1. *entre les arêtes OI et OJ, OI et OK, OI et OL, OI et OP*
2. *entre les plans CIJ et CIF, CIJ et CHK (angles dièdres)*
3. *entre les arêtes et les plans FI et CIJ, CP et CIJ*

Exercice 60
La tête d'une clé de $30\ cm$ *de long posée le long de la partie positive de l'axe* Oy *enserre un boulon situé à l'origine. A l'extrémité de la clé, on applique une force dans la direction* $3\vec{j} - 4\vec{k}$.
Quelle doit être l'intensité de la force pour exercer un moment de torsion de $100\ \ Nm$ *sur le boulon?*

Exercice 61
Soient $\vec{v} = 5\vec{i}$ *et* $\vec{u}$ *de norme 3 dont le point initial est l'origine et qui tourne dans le plan* Oxy.

- ▹ *Déterminer les valeurs maximales et minimales de* $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.
  Dans quelles directions pointent alors $\vec{u}$ *?*
- ▹ *Mêmes questions pour* $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercice 62
Calculer le volume du parallélipipède construit sur les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Exercice 63
Calculer le volume du parallélipipède d'arêtes adjacentes PQ, PR *et* PS.

$$P(1;1;1), \quad Q(2;0;3) \ \ R(4;1;7), \quad S(3;-1;-2)$$

Exercice 64
Démontrer que les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *sont coplanaires.*

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 65
Les points P, Q, R, S *sont-ils dans un même plan?*

$$P(12;0;1), \quad Q(2;4;6) \ \ R(3;-1;2), \quad S(6;2;8)$$

Exercice 66
Soit $\vec{u}$ *donné par ses cosinus directeurs* $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ *et* $\cos(\gamma)$. *Calculer l'angle entre les plans vectoriels* $\vec{u}, \vec{i}$ *et* $\vec{u}, \vec{j}$.

Exercice 67
Démontrez que

$$(\vec{a} - \vec{b}) \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Exercice 68
Soit une force $\vec{F}$ *agissant en un point* A *d'un corps solide, établir la formule de changement d'origine:*

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O - \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{F}$$

Exercice 69
Etablir les propriétés énoncées après la définition du moment axial, formule (24).

Exercice 70
En cinématique du corps solide, la vitesse $\vec{v}_A$ d'un point A d'un corps solide tournant autour d'un axe avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est donné par

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

où O est l'origine de $\vec{\omega}$.
A partir de la règle de Chasles, établir la formule

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

Exercice 71
Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs dont la somme est nulle.
Multiplier vectoriellement l'égalité $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$ par $\vec{a}$, simplifier et en déduire le théorème du sinus:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Exercice 72
Soient les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculer les vecteurs $\vec{d} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ et $\vec{e} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ et vérifier la formule de Gibbs.

Exercice 73

1. *Si*

   $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

   que peut-on dire de $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$?

2. *Si*

   $$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c}$$

   que peut-on dire de $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$?

3. *Résoudre l'équation vectorielle*

   $$\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$$

   où $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$.

   Indications:

   - *Vérifier que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ est une condition d'existence.*
     Chercher une solution particulière $\vec{x}_0$ de la forme $\vec{x}_0 = \lambda\, \vec{a} \wedge \vec{b}$.
   - *Déterminer λ en introduisant $\vec{x}_0$ dans l'équation donnée.*
   - *Démontrer que, si $\vec{x}$ est une autre solution, alors $\vec{x} - \vec{x}_0$ est un multiple $k\,\vec{a}$ de $\vec{a}$.*
   - *En déduire qu'il y a une infinité de solutions, donner la solution générale, paramétrée par k.*

Exercice 74
a) Etablir la formule

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

b) Etablir la formule de Jacobi:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{o}$$

c) Examiner les différents produits de quatre vecteurs, par exemple

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})$$

d) Etablir la formule de Lagrange:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\, \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

où le carré d'un vecteur représente le produit scalaire de ce vecteur par lui-même:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2 = x^2$$

Exercice 75
Soit un tétraèdre de sommets $ABCD$.
Exprimer le volume du tétraèdre à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$.

Exercice 76
On suppose que les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas coplanaires.
On définit les vecteurs suivants:

$$\vec{k}_1 = \frac{\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3}{\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)} \qquad \vec{k}_2 = \frac{\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)} \qquad \vec{k}_3 = \frac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}{\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)}$$

De tels vecteurs se rencontrent en cristallographie. Des vecteurs de la forme $n_1\vec{v}_1 + n_2\vec{v}_2 + n_3\vec{v}_3$, où chaque n_i est un entier, forment un réseau pour un cristal.
Le réseau réciproque est défini par les vecteurs $n_1\vec{k}_1 + n_2\vec{k}_2 + n_3\vec{k}_3$.

Démontrer:

1. *$\vec{k}_i$ est perpendiculaire à $\vec{v}_j$, pour tout $i \neq j$.*
2. *$\vec{k}_i \cdot \vec{v}_i = 1$, pour tout i.*
3. $\vec{k}_1 \cdot (\vec{k}_2 \wedge \vec{k}_3) = \dfrac{1}{\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)}$

   Indications:

   Identifier les dénominateurs et leur donner un nom.

   Utiliser les propriétés du produit vectoriel, du produit mixte et la formule de Gibbs.

11 Solutions

Corrigé ex 1

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{FA}$$
$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EF}$$

Corrigé ex 2

$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{GB}$$
$$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EA}$$
$$\overrightarrow{EC}$$

Corrigé ex 3

$$\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{PI} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{JI} = \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FA}$$
$$\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{FC}$$
$$\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{KD}$$
$$\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{AD}$$

Corrigé ex 4

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AO} = \vec{o}$$
$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{CO}$$
$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD}$$

Corrigé ex 5

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB}$$
$$\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Corrigé ex 6

$$\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{LH} + \overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{LI} = \overrightarrow{FC}$$
$$\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{LP} = \overrightarrow{LI} = \overrightarrow{FC}$$

Corrigé ex 7

$\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ $\quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ $\quad \vec{c} = \overrightarrow{DC}$ $\quad \vec{d} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}$ $\quad \vec{e} = \vec{0}$

Corrigé ex 8

$\vec{a} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ $\quad \vec{b} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$ $\quad \vec{c} = \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{GB}$

$\vec{d} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{HD}$ $\quad \vec{e} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ $\quad \vec{f} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$

Corrigé ex 9

$\vec{u} + \vec{w}$ $\quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ $\quad \vec{u} + \vec{v}$ $\quad -\vec{u} + \vec{v}$ $\quad \vec{v} + \vec{w}$ $\quad \vec{w} - \vec{u}$

$-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ $\quad -\vec{u} - \vec{v}$ $\quad -\vec{u} + \vec{w}$ $\quad \vec{w}$ $\quad -\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

Corrigé ex 10

$$-\vec{u} + \vec{w} \qquad -\vec{v} + \vec{w} \qquad \vec{u} - \vec{v} \qquad -\vec{u} - \vec{v}$$

Corrigé ex 11

K et P sont à gauche de AB, L à droite et N entre.

Corrigé ex 12

P est à droite de AB, Q entre.

Corrigé ex 13

$$\vec{x} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$$

Corrigé ex 14

Les questions (b) et (f) n'ont pas de sens.
La somme d'un vecteur et d'un nombre n'est pas définie.
La division des vecteurs non plus.

1. (a): $\vec{0}$
2. (c): $\overrightarrow{FC}$
3. (d): $2\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{FE} = 4\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{AO} = 4\overrightarrow{BC}$
4. (e): $\overrightarrow{FC}$

Corrigé ex 15

1. oui: face arrière, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$, donc $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DG}$.
2. non.
3. oui: face bas, $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}$.
4. oui: plan oblique $EFCD$, $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$, donc $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{GH}$.

Corrigé ex 16

1. oui: plan $AJDG$, $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EK}$.
2. oui: plan $KHBE$, $\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{JI}$, donc $\overrightarrow{KB} = 3\overrightarrow{LG} + \overrightarrow{ID}$.
3. non, car $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{JD}$ sont dans le plan $IJDC$ et $\overrightarrow{HI}$ ne l'est pas.

Corrigé ex 17

$$\begin{bmatrix} -0.5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2.75 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -41 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 18

$$(\alpha;\beta) = (3;2)$$

Corrigé ex 19

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
On a encore, $\vec{a} \,/\!/\, \vec{d}$, $\quad \vec{b} \,/\!/\, \vec{k} \quad$ *et* $\quad \vec{c} \,/\!/\, \vec{i}$.

Corrigé ex 20

$$\vec{v} = \frac{15}{29}\vec{a}\ ,\ \alpha = \frac{35}{29}$$

Corrigé ex 21

Rappelons que les vecteurs-colonnes des vecteurs de base, $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont:*

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) Chaque vecteur est transformé en son opposé, ainsi les images des vecteurs de base sont:

$$\vec{i'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{j'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{k'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2) Le vecteur parallèle à l'axe est fixe, les autres vont sur leur opposé, voici le résultat pour la symétrie d'axe OI*:*

$$\vec{i'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{j'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{k'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3) Les vecteurs parallèles au plan sont fixes, l'autre va sur son opposé, voici le résultat pour la symétrie de plan OIJ*:*

$$\vec{i'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{j'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{k'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4) Le vecteur parallèle à l'axe de rotation est fixe, pour les rotations d'axe OI*, on a les résultats suivants:*

$$\vec{i'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{j'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{k'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\vec{i'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{j'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{k'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5) Remarquons que $OF = OD$ et $OA = OG$.
Une rotation d'axe OF va permuter cycliquement les sommets I, J, N et donc les vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$. Ainsi, une des rotations donne:

$$\vec{i'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{j'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{k'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et l'autre

$$\vec{i'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{j'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{k'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Une rotation d'axe OG va permuter cycliquement les sommets J, N, K et donc les vecteurs $-\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$. Ainsi, une des rotations donne:

$$\vec{i'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{j'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{k'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et l'autre

$$\vec{i'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{j'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{k'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 22
a) Voici les vecteurs-colonnes demandés:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 72 \\ 14 \\ -11 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ -21 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 419/6 \\ 41/2 \\ -46/3 \end{bmatrix}$$

b) Ils sont coplanaires, car l'un est une combinaison linéaire des autres:

$$\vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

Corrigé ex 23

a) non. *b) oui.*

Corrigé ex 24

Formule du point milieu

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est la moyenne des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OB}} \tag{28}$$

Les coordonnées de M sont la moyenne des coordonnées de A et B:

$$\boldsymbol{M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\,;\,\frac{a_2 + b_2}{2}\right)}$$

Corrigé ex 25

Formule du centre de gravité:

Le vecteur $\overrightarrow{OG}$ est la moyenne des vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OC}} \tag{29}$$

Les coordonnées de G sont la moyenne des coordonnées de A, B et C:

$$\boldsymbol{G(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}\,;\,\frac{a_2 + b_2 + c_2}{3})}$$

Corrigé ex 26

a) La condition d'équilibre est

$$n\,\overrightarrow{AG} = m\,\overrightarrow{GB}$$

b)

$$n(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG})$$

d'où

$$\overrightarrow{OG} = \frac{n\,\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{n + m}$$

Corrigé ex 27

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ des vecteurs unitaires dans les directions est et nord.
Les quatre déplacements sont:

$$8\vec{j}, \quad -10\sqrt{2}\,\vec{i} + 10\sqrt{2}\,\vec{j}, \quad -6\vec{i} - 6\sqrt{3}\,\vec{j}, \quad 3\sqrt{2}\,\vec{i} - 3\sqrt{2}\,\vec{j}$$

Le déplacement total est donc:

$$(-6 - 7\sqrt{2})\vec{i} + (8 - 6\sqrt{3} + 7\sqrt{2})\vec{j} \approx -15.898\vec{i} + 7.507\vec{j}$$

La longueur du trajet parcouru est donc $\sqrt{15.898^2 + 7.507^2} \approx 17.58\ km$.

La direction est

$$\arctan\left(\frac{15.898}{7.507}\right) \approx 64°7'\ NW$$

Corrigé ex 28

Pour rendre les vecteurs unitaires, il faut les diviser par leurs longueurs qui sont:

$$a)\ \sqrt{2} \qquad b)\ 5 \qquad c)\ 5 \qquad d)\ \sqrt{89}$$

Corrigé ex 29

a)

$$\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = 1$$

b)

$$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

Corrigé ex 30

Il suffit de rendre unitaire les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$

$$\vec{u} = \frac{1}{||\overrightarrow{OA}||}\ \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{||\overrightarrow{OB}||}\ \overrightarrow{OB}$$

et d'en faire la somme ou la différence:

$$\vec{u} \pm \vec{v}$$

Pour vérifier qu'elles sont orthogonales, calculons le produit scalaire:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = ||u||^2 - ||v||^2 = 1 - 1 = 0$$

Corrigé ex 31

$$AB + BC + CA = 5 + 13 + \sqrt{68}$$

Corrigé ex 32

Il faut vérifier que $\overrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{BC}$ *et que* $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$

Corrigé ex 33

Le rayon vaut 5.

Corrigé ex 34

$||\vec{a}|| = \sqrt{105} \qquad ||\vec{b}|| = \sqrt{115} \qquad ||\vec{c}|| = 13 \qquad ||\vec{d}|| = \sqrt{0,5 + \pi^2} \qquad ||\vec{e}|| = 1$

Corrigé ex 35

1) $\sqrt{77}$ *2)* $\sqrt{108}$

Corrigé ex 36

1) -1 *2)* 0 *3)* $9/4$ *4)* 0 *5)* 25 *6)* 0

Les couples de vecteurs perpendiculaires sont ceux dont le produit scalaire est nul, donc (2) et (6).

Il suffit de prendre n'importe quel multiple de $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Corrigé ex 37

Le produit scalaire est nul, on obtient $-5x + 12 = 0$*, d'où* $x = 12/5$.

Corrigé ex 38

Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *est nul.*

Corrigé ex 39

$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; \vec{b} \cdot \vec{a} = 61$ $\quad$ $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ $\quad$ $\vec{b} \cdot \vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{d}) = (-19) \cdot (-4) = 76$

$(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} = -19\vec{a}$ $\quad$ $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = 61\vec{c}$ $\quad$ $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{d} = -19\vec{d}$

$(\vec{c} \cdot \vec{d})\vec{b} = -21\vec{b}$ $\quad$ $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d}) = 61 \cdot (-21)$

Corrigé ex 40

Leur produit scalaire est nul.

Corrigé ex 41

La règles de Chasles permet de calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$ *et* $\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Leur produit scalaire est nul, donc les droites sont perpendiculaires.

Corrigé ex 42

Il suffit de calculer les produits scalaires donnés.

Corrigé ex 43

a) $\dfrac{9}{5}$ $\qquad$ *b)* $\dfrac{1}{28\sqrt{2}}$

Corrigé ex 44

Notons $\vec{p} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2}\,\vec{b}$ *le vecteur projeté.*

a) $\vec{p} = \dfrac{27}{9}\,\vec{b} = 3\,\vec{b}$ *et* $p = 3b = 9$.

b) $\vec{p} = -\dfrac{46}{38}\,\vec{b} = -\dfrac{23}{19}\,\vec{b}$ *et* $p = \dfrac{23}{19}\,\sqrt{38}$.

Corrigé ex 45

La règle de Chasles et le produit scalaire donnent:

a) $\|\overrightarrow{AC'}\| = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ *b)* $\|\overrightarrow{CC'}\| = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ *c) L'aire vaut 6.*

d) $C'(\dfrac{21}{5}\,;\,\dfrac{18}{5})$ $\qquad$ *e)* $C''(\dfrac{27}{5}\,;\,\dfrac{6}{5})$

Corrigé ex 46

Le produit scalaire donne:

a) $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$ $\qquad$ *b)* $\cos\alpha = \dfrac{11}{14}$

Corrigé ex 47

Appelons $\vec{P}$ *le poids,* $\vec{H}$ *la force horizontale et* $\vec{T}$ *la tension.*
L'équilibre est donné par

$$\vec{P} + \vec{H} + \vec{T} = \vec{o}$$

Introduisons une base $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *orthonormée, alors*

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix}, \vec{H} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

Ainsi $H + T_x = 0$ *et* $-P + T_y = 0$.
Les données imposent $|T_x| = |T_y|$, *ainsi* $H = P = -T_x = T_y$, *et* $\vec{T} = \begin{bmatrix} -P \\ P \end{bmatrix}$.

Corrigé ex 48

a)

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{p}\ ,\ \cos(\beta) = \frac{y}{p}\ ,\ \cos(\gamma) = \frac{z}{p}$$

b)

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

c) Le vecteur unitaire et de même sens que $\vec{p}$.
d)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\alpha)\cos(\alpha') + \cos(\beta)\cos(\beta') + \cos(\gamma)\cos(\gamma')$$

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *étant les vecteurs unitaires correspondants à* $\vec{p}$ *et* $\vec{q}$.

D'autre part,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv\cos(\theta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\theta)$$

donc

$$\cos(\theta) = \cos(\alpha)\cos(\alpha') + \cos(\beta)\cos(\beta') + \cos(\gamma)\cos(\gamma')$$

Corrigé ex 49

On a

$$\vec{a}_{/\!/} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2}\,\vec{b} = \frac{13}{9}\,\vec{b}\ ,\ \ \vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{/\!/} = \begin{bmatrix} 22/9 \\ -8/9 \\ 19/9 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 50

Les entrées/sorties des différents produits sont donnés par les figures (6), (11) et (14).

scalaire	*pas de sens*	*vecteur*
pas de sens	*pas de sens*	*scalaire*

Corrigé ex 51

La norme vaut $25\sqrt{3}$, *le vecteur pointe vers l'intérieur de la page.*

Corrigé ex 52

La norme vaut 24, *le vecteur pointe vers l'intérieur de la page.*

Corrigé ex 53

La norme vaut $10,8\ \sin(80°) \approx 10,6\,Nm$.

Corrigé ex 54

1. *Le vecteur moment est défini par*

$$\vec{M}_P = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F} = (a\,\vec{j} - d\,\vec{k}) \wedge -F(\cos(\alpha)\,\vec{j} + \sin(\alpha)\,\vec{k}) = -F(a\ \sin(\alpha) + d\cos(\alpha)\,\vec{i}$$

La norme vaut

$$F(a\sin(\alpha) + d\cos(\alpha) = 72(1+\sqrt{3}) \approx 200\,Nm$$

2. $$\vec{M}_P = (a\,\vec{j} - d\,\vec{k}) \wedge +F(\sin(\alpha)\,\vec{i} - \cos(\alpha)\,\vec{j}) = -F(d\ \cos(\alpha)\,\vec{i} + d\ \sin(\alpha)\,\vec{j} + a\ \sin(\alpha)\,\vec{k})$$

La norme vaut

$$F\ \sqrt{d^2 + a^2\ \sin^2(\alpha)} = 72\,\sqrt{5} \approx 161\,Nm$$

On établira que le second moment est inférieur ou égal au premier si et seulement si

$$\tan\alpha \leq 2\,\frac{a}{d}$$

Corrigé ex 55

Les produits vectoriels valent:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \\ -9 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 56

Le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ *donne un vecteur orthogonal.*
On le divise par sa norme et on obtient une des deux solutions.
L'autre s'obtient en prenant le vecteur opposé:

$$\pm\ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 57

Il faut rajouter une troisième coordonnée nulle aux points.

La norme du produit vectoriel $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 4$ *donne l'aire demandée.*

Corrigé ex 58

La moitié de la norme du produit vectoriel $\frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{7}{2}$ *donne l'aire demandée.*

Corrigé ex 59

Voici les valeurs des angles:

1. $\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \approx 41,41^0$, $\arccos\left(\frac{1}{4}\right) \approx 75,52^0$, 90^0 , 45^0

2. 60^0 , $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right) \approx 40,1^0$,

3. $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 26,57^0$, $\arccos\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right) \approx 37,76^0$,

Corrigé ex 60

$$\vec{F} = F \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

et

$$\vec{d} = 0.3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La norme du moment vaut 100*, on obtient ainsi la valeur* $F \approx 417\, N$.

Corrigé ex 61

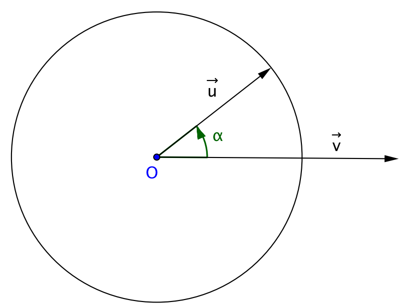


Figure 29: L'extrémité de $\vec{u}$ varie sur un cercle de rayon 3

▹

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\ \sin(\alpha) = 15\ \sin(\alpha)$$

Cette valeur est minimale si le sinus vaut -1, donc pour $\alpha = 3\pi/2$ *et est maximale si le sinus vaut 1, donc pour* $\alpha = \pi/2$.

Elle est nulle si le sinus est nul, donc pour $\alpha = 0$ *ou* $\alpha = \pi$ *. Voir la figure (29).*

▹

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\ \cos(\alpha) = 15\ \cos(\alpha)$$

Cette valeur est minimale si le cosinus vaut -1, donc pour $\alpha = \pi$*, est nulle si* $\alpha = \pm\pi/2$ *et est maximale si le cosinus vaut 1, donc pour* $\alpha = 0$.

Corrigé ex 62

Le volume vaut 226.

Corrigé ex 63

Le volume vaut 21.

Corrigé ex 64

Ils le sont, car le produit mixte est nul.

Corrigé ex 65

Le produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$ *vaut 198 et n'est donc pas nul.*
Ainsi les points P, Q, R, S *ne sont pas coplanaires.*

Corrigé ex 66

L'angle θ *entre deux plans est l'angle entre leurs normales* $\vec{n}_1$ *et* $\vec{n}_2$*.*

$$\vec{n}_1 = \vec{u} \wedge \vec{i} = \cos(\gamma)\,\vec{j} - \cos(\beta)\,\vec{k}$$

et

$$\vec{n}_2 = \vec{u} \wedge \vec{j} = -\cos(\gamma)\,\vec{i} + \cos(\alpha)\,\vec{k}$$

Leurs longueurs valent

$$\|\vec{n}_1\| = \|\vec{u} \wedge \vec{i}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{i}\|\,\sin(\alpha)$$

et

$$\|\vec{n}_2\| = \|\vec{u} \wedge \vec{j}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{j}\|\,\sin(\beta)$$

Le produit scalaire donne d'une part:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|\cos(\theta) = \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\theta)$$

et d'autre part

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -\cos(\alpha)\,\cos(\beta)$$

donc

$$\theta = \arccos\left(\frac{-\cos(\alpha)\,\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}\right) = \arccos\left(-\cot(\alpha)\,\cot(\beta)\right) = \pi - \arccos\left(\cot(\alpha)\,\cot(\beta)\right)$$

Corrigé ex 67

Il suffit d'utiliser la distributivité du produit vectoriel pour obtenir l'égalité demandée.

Corrigé ex 68

Rappelons que $\overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F}$ *et* $\overrightarrow{M}_{O'} = \overrightarrow{O'A} \wedge \overrightarrow{F}$*.*
En soustrayant ces égalités, on trouve

$$\overrightarrow{m}_O - \overrightarrow{m}_{O'} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O'A}) \wedge \overrightarrow{F} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO'}) \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{F}$$

Corrigé ex 69

On décompose $\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA}$ *et* $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel$*.*
Le produit mixte étant nul si deux vecteurs sont colinéaires, on peut conclure.

Corrigé ex 70

Rappelons que $\overrightarrow{v}_A = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{v}_B = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB}$*.*
En soustrayant ces égalités, on trouve

$$\overrightarrow{v}_B - \overrightarrow{v}_A = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Corrigé ex 71

Multiplions à gauche l'égalité $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$ *par le vecteur* $\vec{a}$*:*

$$\vec{a} \wedge \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{o}$$

Les premier et dernier produits sont nuls. Ainsi

$$\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{o}$$

ou

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{a} \wedge \vec{c}$$

et

$$a\,b\ \sin(\gamma') = a\,c\ \sin(\beta')$$

où γ' *est l'angle entre les vecteurs* $\vec{a}$ et $\vec{b}$*, supplémentaire de l'angle* γ *du triangle.*

Comme le sinus du supplémentaire est égal au sinus de l'angle. On obtient:

$$b\ \sin(\gamma) = c\ \sin(\beta)$$

Ce qui fournit une des égalités demandées, les autres se déduisent selon la même méthode.

Corrigé ex 72

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} +15 \\ -10 \\ -20 \end{bmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Corrigé ex 73

a)

$\vec{b}$ et $\vec{c}$ *ont mêmes projections sur le vecteur* $\vec{a}$*.*
Si on représente ces vecteurs par des flèches d'origine commune O*:*

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{OC}$$

OAB *étant fixé, on peut dire alors que:*
En géométrie plane:
C *doit être sur la droite perpendiculaire à* OA *par* B*.*

En géométrie de l'espace:
C *doit être sur le plan perpendiculaire à* OA *par* B*.*

b)

C *doit être sur une parallèle à* OA *par* B*.*

c)

- ▹ $\vec{b}$ *étant égal à* $\vec{a} \wedge \vec{x}$*, il est nécessairement perpendiculaire à* $\vec{a}$*.*
- ▹

$$\vec{a} \wedge \vec{x}_0 = \vec{a} \wedge (\lambda\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\lambda\vec{a} - (\vec{a} \cdot \lambda\vec{a})\vec{b} = 0 - \lambda a^2\vec{b} = \vec{b} \Rightarrow -\lambda\, a^2 = 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{a^2}$$

- *On a* $\vec{a}\wedge\vec{x}_0 = \vec{b}$ *et* $\vec{a}\wedge\vec{x} = \vec{b}$*, donc* $\vec{a}\wedge(\vec{x}-\vec{x}_0) = \vec{o}$*, ainsi* $\vec{a}$ *et* $\vec{x}-\vec{x}_0$ *sont parallèles, donc* $\vec{x}-\vec{x}_0 = k\,\vec{a}$*.*
- *La solution générale s'écrit donc, avec k un paramètre arbitraire:*

$$\vec{x} = -\frac{\vec{b}\wedge\vec{a}}{a^2} + k\,\vec{a}$$

Corrigé ex 74
a) Poser $\vec{e} = \vec{a}\wedge\vec{b}$*, utiliser* $(\vec{e}\wedge\vec{c})\cdot\vec{d} = \vec{e}\cdot(\vec{c}\wedge\vec{d})$ *et la formule du double produit vectoriel.*

b)

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

on obtient aussi par permutations cycliques

$$\vec{b}\wedge(\vec{c}\wedge\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

et

$$\vec{c}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a})$$

Il n'y a plus qu'à les ajouter.

c)
Voyons un cas:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d}) = \vec{p}\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d}) = \vec{c}\,(\vec{p}\cdot\vec{d}) - \vec{d}\,(\vec{p}\cdot\vec{c}) = \vec{c}\,((\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{d}) - \vec{d}((\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}) = \vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) - \vec{d}\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

Ainsi on obtient une combinaison linéaire de $\vec{c}$ *et* $\vec{d}$*:*

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{d})\,\vec{c} - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,\vec{d}$$

On a de même,

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d}) = (\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{q} = \vec{q}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{a})$$

En continuant le développement on arrive à:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d}) = (\vec{c},\vec{d},\vec{a})\,\vec{b} - (\vec{c},\vec{d},\vec{b})\,\vec{a}$$

En soustrayant on obtient:

$$(\vec{d},\vec{b},\vec{c})\vec{a} + (\vec{d},\vec{c},\vec{a})\vec{b} + (\vec{d},\vec{a},\vec{b})\vec{c} - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d} = 0$$

Ainsi:

$$\vec{d} = \frac{(\vec{d},\vec{b},\vec{c})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\,\vec{a} + \frac{(\vec{d},\vec{c},\vec{a})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\,\vec{b} + \frac{(\vec{d},\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\,\vec{c}$$

$\vec{d}$ *est décomposé selon* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$*, les coefficients représentent des quotients de volumes.*

d) Se déduit de a).

Corrigé ex 75

$$V = \frac{1}{6}\,|(\vec{b},\vec{c},\vec{d}) - (\vec{c},\vec{d},\vec{a}) + (\vec{d},\vec{a},\vec{b}) - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$$

[Le volume est $\frac{1}{6}|(\vec{b}-\vec{a},\vec{c}-\vec{a},\vec{d}-\vec{a})|$ *; utiliser la trilinéarité].*

Corrigé ex 76

Les dénominateurs sont le produit mixte

$$p = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3$$

Ainsi

$$\vec{k}_1 = \frac{\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3}{p} \qquad \vec{k}_2 = \frac{\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1}{p} \qquad \vec{k}_3 = \frac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}{p}$$

1. $\vec{k}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{p}\,(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2 = 0$
2. $\vec{k}_1 \cdot \vec{v}_1 = \frac{1}{p}\,(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_1 = \frac{p}{p} = 1$
3. *Calculons d'abord*

$$\vec{k}_2 \wedge \vec{k}_3 = \frac{1}{p}\,\vec{k}_2 \wedge (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \overset{Gibbs}{=} \frac{1}{p}\,(\vec{k}_2 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_1 - (\vec{k}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_2 = \frac{1}{p}\,(1)\vec{v}_1 - (0)\vec{v}_2 = \frac{1}{p}\,\vec{v}_1$$

et

$$\vec{k}_1 \cdot (\vec{k}_2 \wedge \vec{k}_3) = \frac{1}{p^2}\,(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_1 = \frac{1}{p^2}\,p = \frac{1}{p}$$